第　5　問

行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が次の条件（D）を満たすとする。

（D）　A の成分 a, b, c, d は整数である。また，平面上の 4 点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{L}(a,\ b)$，$\mathrm{M}(a+c,\ b+d)$，$\mathrm{N}(c,\ d)$ は，面積 1 の平行四辺形の 4 つの頂点をなす。さらに，線分 OL，ON が x 軸の正方向となす角をそれぞれ θ_1，θ_2 とすると，$\sin(\theta_2 - \theta_1) > 0$ が成り立つ。

$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ とおく。次の問いに答えよ。

⑴　行列 $BC^{-1}BCBC^{-1}$ を求めよ。

⑵　条件（D）を満たす 2 つの 2×2 行列を P, Q とすると，行列 PQ と P^{-1} も条件（D）を満たすことを示せ。

⑶　$c = 0$ ならば，A に B，B^{-1} のどちらかを左から次々にかけることにより，2 個の行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ のいずれかにできることを示せ。

⑷　$|a| \geqq |c| > 0$ とする。BA，$B^{-1}A$ の少なくともどちらか一方は，それを $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ とすると

$$|x| + |z| < |a| + |c|$$

を満たすことを示せ。

⑸　A に C を左右のいずれかからもしくは両方から次々にかけることにより，行列 $\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ を得たとする。このとき，$|r|$ のとり得る値をすべて求めよ。

⑹　条件（D）を満たす任意の 2×2 行列は，いくつかの B と C の積で表せることを示せ。