解答

(1)　$C^{-1}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$であるから、実際に計算することにより、

$BC^{-1}BCBC^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$　を得る.　　　　　……（答）

(2)　Aについて、平行四辺形 OLMN の面積Sをa,b,c,dを用いて表すと、$\sin(\theta_2-\theta_1)>0$より、

$$\begin{aligned}S&=\left|\overrightarrow{OL}\right|\left|\overrightarrow{ON}\right||\sin(\theta_2-\theta_1)|\\&=\left|\overrightarrow{OL}\right|\left|\overrightarrow{ON}\right|\sin(\theta_2-\theta_1)\\&=\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}(\sin\theta_2\cos\theta_1-\cos\theta_2\sin\theta_1)\\&=ad-bc\end{aligned}$$

$$\left(\because\ \sin\theta_1=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\cos\theta_1=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\sin\theta_2=\frac{d}{\sqrt{c^2+d^2}},\cos\theta_2=\frac{c}{\sqrt{c^2+d^2}}\right)$$

∴ 行列Aが条件(D)を満たすことは、Aの各成分が全て整数で行列式$\det A=1$となることと同値である.

いま、成分が全て整数の 2 つの2×2行列を$P=\begin{pmatrix}g & h\\ i & j\end{pmatrix},Q=\begin{pmatrix}k & l\\ m & n\end{pmatrix}$とおくと、

$PQ=\begin{pmatrix}gk+hm & gl+hn\\ ik+jm & il+jn\end{pmatrix}$より、この各成分は全て整数で、

$$\begin{aligned}\det PQ&=(gk+hm)(gl+hn)-(ik+jm)(il+jn)\\&=gkjn+hmil-gljm-hnik\\&=(gj-hi)(kn-lm)\\&=\det P\det Q\end{aligned}$$

∴ $\det P=\det Q=1$のとき$\det PQ=1$となるから、行列P,Qがいずれも条件(D)を満たすならば、行列PQも条件(D)を満たす.

また、$\det P=1\neq0$ならばPは逆行列P^{-1}を持つが、

$P^{-1}=\frac{1}{\det P}\begin{pmatrix}j & -h\\ -i & g\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}j & -h\\ -i & g\end{pmatrix}$より各成分は整数であり、$\det P^{-1}=gj-hi=\det P=1$

∴ 条件(D)を満たす行列Pの逆行列P^{-1}は条件(D)を満たす.

よって題意は示された■

(3)　$c=0$のとき、$\det A=ad=1$
a,dは整数であるから、$(a,d)=(1,1),(-1,-1)$　　　　　……（＊）

ここで $BA=\begin{pmatrix} a & b+d \\ 0 & d \end{pmatrix}, B^{-1}A=\begin{pmatrix} a & b-d \\ 0 & d \end{pmatrix}$ であるが、

（＊）より $d=\pm 1$ なので、$BA, B^{-1}A$ のいずれかの (1,2) 成分の絶対値は必ず b よりも 1 小さくなる.

この操作は行列の他の成分の値を変えておらず、b は整数であるから、$b \neq 0$ のときはこれを繰り返していけば必ず (1,2) 成分を 0 にすることができる.

∴ （＊）より、はじめから $b=0$ のときも含め、A は $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ のいずれかにできると言える■

(4)　$BA=\begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix}, B^{-1}A=\begin{pmatrix} a-c & b-d \\ c & d \end{pmatrix}$ であるから、$|x|+|z|=|a \pm c|+|c|$

∴ $|a| \geqq |c| > 0$ ならば、$|a+c|<|a|$ と $|a-c|<|a|$ のうちのどちらかが成り立つことを示せばよい.

ここで、

$$\begin{aligned} \{(a+c)^2-a^2\}\{(a-c)^2-a^2\} &= (c^2+2ac)(c^2-2ac) \\ &= c^2(c^2-4a^2) \\ &< 0 \qquad (\because\ |a| \geqq |c| > 0\ ) \end{aligned}$$

$$\therefore\ |a| \geqq |c| > 0 \text{ ならば } (a+c)^2-a^2<0 \text{ または } (a-c)^2-a^2<0$$
$$\Leftrightarrow\ |a| \geqq |c| > 0 \text{ ならば } |a+c|<|a| \text{ または } |a-c|<|a|$$

よって題意は示された■

(5)　$CA=\begin{pmatrix} c & d \\ -a & -b \end{pmatrix}, AC=\begin{pmatrix} -b & a \\ -d & c \end{pmatrix}$ より、C は左からかけると行を、右からかけると列を入れ替え、適当にその符号を変える行列である.

∴ これを繰り返して得られる行列の (2,1) 成分 r の絶対値として考えられる値は、

$|a|, |b|, |c|, |d|$ の 4 つのみ.　　　　　……（答）

(6)　まず、どんな A からでも B, B^{-1}, C を次々にかければ必ず $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ が得られることを示す.

以下、A, B, C は条件(D)を満たす行列であるので、(2)で示したようにこれらの行列とその逆行列の積のみからなる行列がすべて条件(D)を満たすことに注意する.

（Ⅰ）　$c=0$ のとき

(3)より A は $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ のいずれかにできるが、

$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ となった場合にも、さらに左から $C^2=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ をかければ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ となるから、

このときには必ず B, B^{-1}, C との積のみで A を $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ にできると言える.

（Ⅱ） $c \neq 0$ のとき

$A = A_0 = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{pmatrix}$ とし、これに次の（ⅰ）と（ⅱ）の操作を合計 n 回繰り返して得られる行列を

$A_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$ とおく.

（ⅰ） $|a_n| \geqq |c_n| > 0$ ならば、(4)で見た通り左から B か B^{-1} をかけることで (2,1) 成分の値を変えないまま (1,1) 成分の絶対値を小さくした行列を得られるから、繰り返せばいずれ (1,1) 成分の絶対値を (2,1) 成分の絶対値よりも小さくすることができる.

ここまでを 1 回の操作とすると、$|c_{n+1}| = |c_n| > |a_{n+1}|$

（ⅱ） $|c_n| > |a_n| \geqq 0$ ならば、(5)で見た通り左から C をかけることで (2,1) 成分の絶対値と (1,1) 成分の絶対値を入れ替えられる.

これを 1 回の操作とすると、$|a_{n+1}| = |c_n| > |c_{n+1}| = |a_n| \geqq 0$

それぞれの条件を見れば、（ⅰ）と（ⅱ）の操作は $c_n = 0$ となるまで交互に繰り返すことができるのが分かる.

さらに、（ⅰ）では $|c_n| = |c_{n+1}|$ 、（ⅱ）では $|c_n| > |c_{n+1}|$ としているから、数列 $\{|c_n|\}$ は単調減少する非負整数列となるので、いずれ必ず 0 となる.

$\therefore$ $c \neq 0$ のとき、左から B, B^{-1}, C を次々にかければいずれ (2,1) 成分を 0 にすることができると言え、こうして得られた行列も条件(D)を満たすから、（Ⅰ）より B, B^{-1}, C との積のみで $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ にできる.

（Ⅰ）、（Ⅱ）より、 $\left(\text{適当な } B, B^{-1}, C \text{ の積}\right) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ となることが示された.

この両辺に、左から適当に逆行列をかけていけば、

$$A = \left(\text{適当な} B, B^{-1}, C^{-1} \text{の積}\right)$$

と表すことができるが、

$$\begin{aligned} &B^{-1} = C^{-1}BCBC^{-1} \qquad (\because (1)) \\ &C^{-1} = C^3 \end{aligned}$$

より、適当な B, B^{-1}, C^{-1} の積は適当な B, C の積で表せる.

よって、条件(D)を満たす任意の 2×2 行列は、いくつかの B と C の積で表せる■