入学試験問題 ㊣

総合科目 Ⅱ

（配点 100 点）

平成 20 年 3 月 13 日　　13 時 00 分—15 時 00 分

注意事項

1 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いてはいけません。

2 この問題冊子は全部で 15 ページあります。
落丁，乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら，手をあげて監督者に知らせなさい。

3 解答には，必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。

4 2 枚の解答用紙が渡されるが，解答は，問題毎に所定の解答用紙に記入しなさい。

5 **解答用紙の指定欄に，受験番号，氏名を記入しなさい。指定欄以外にこれらを記入してはいけません。**

6 **解答は，必ず解答用紙の指定された箇所に記入しなさい。**

7 **解答用紙の解答欄に，関係のない文字，記号，符号などを記入してはいけません。また，解答用紙の欄外の余白には，何も書いてはいけません。**

8 この問題冊子の余白は，計算用に使用してもよいが，どのページも切り離してはいけません。

9 解答用紙は，持ち帰ってはいけません。

10 試験終了後，問題冊子は持ち帰りなさい。

第　1　問

2つの対象がどれくらい離れているかを定量的に記述するために，対象の間のへだたりを表す量を適切に導入することは，さまざまな分野において有効である。

A

数直線上に n 個の点 P_1，…，P_n をとり，これらの座標をそれぞれ，x_1，…，x_n とする。実数 u に対して

$$f(u) = \sum_{k=1}^{n} |x_k - u|$$

とおく。

(A-1)　$n = 3$ のとき，$x_1 < x_2 < x_3$ として，関数 $f(u)$ の値を最小にする u とそのときの最小値を x_1，x_2，x_3 を用いて表せ。

(A-2)　ある会社の事業所が一直線上に n 個並んでいる。各事業所の位置を数直線上に表し，これらの座標を x_1，…，x_n とする。ここで，$x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ とする。この会社では，事業所が並んでいる直線上で各事業所からの距離の和が最小になる地点に本社を設置したいと考えている。n が奇数の場合と偶数の場合に分けて，このような条件を満たす本社の位置の座標を求め，その理由を説明せよ。ただし，n 個の事業所の一つと同じ場所に本社を設置してもかまわないとする。

xy 平面上に n 個の点 Q_1, …, Q_n をとり，これらの座標を，それぞれ $(x_1,\ y_1)$, …, $(x_n,\ y_n)$ とする。n 個の点 Q_1, …, Q_n になるべく近い直線 $y = ax + b$ を求めるため，

$$d = \sum_{k=1}^{n} |y_k - (ax_k + b)|$$

とおき，d を最小にする a，b の値を定めることを考える。

以下の問では $n = 3$ とする。

(A−3)　$a = 1$ と固定して

$$d = \sum_{k=1}^{3} |y_k - (x_k + b)|$$

を b の関数とみなす。点 Q_1, Q_2, Q_3 の座標が，それぞれ $(1,\ 1)$, $(2,\ 3)$, $(3,\ 3)$ のとき，d を最小にする b の値を求めよ。

(A−4)　3 点 $Q_1(x_1,\ y_1)$, $Q_2(x_2,\ y_2)$, $Q_3(x_3,\ y_3)$ に対して，

$$d = \sum_{k=1}^{3} |y_k - (ax_k + b)|$$

を最小にするような a，b の値を x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 で表せ。ただし，$x_1 < x_2 < x_3$ とする。

B

遺伝子は４通りの文字A，C，G，Tの配列からなり，世代ごとに引き継がれていくが，この配列は世代とともに変化していく可能性がある。遺伝子の配列のデータから生物の系統関係などを推定するためには，配列の間のへだたりを表す量を導入することが重要である。ここでは，以下のような単純化されたモデルを用いて，遺伝子の配列の世代による推移を考察してみよう。

遺伝子の配列の一つの文字について，これが次の世代に引き継がれるときに，他の３通りの文字に置き換わる確率を，それぞれ $\dfrac{\alpha}{3}$ とする。ここで，α は $0 < \alpha < 1$ を満たす実数とする。ある文字がそのまま次の世代に引き継がれる確率は $1 - \alpha$ である。例えば文字Aが

$$A \to A \to C$$

と推移する確率は

$$(1 - \alpha) \times \frac{\alpha}{3}$$

である。

最初の世代における遺伝子の配列の一つの文字Aに注目する。これが n 番目の世代においてAである確率を $P_{\mathrm{AA}}(n)$ で表す。ここで，最初の世代は０番目と数える。また，０番目の世代においてAである文字が n 番目の世代においてCとなる確率を $P_{\mathrm{AC}}(n)$ で表す。

(B−1)　$P_{\mathrm{AA}}(n+1)$ を $P_{\mathrm{AA}}(n)$ と α を用いて表せ。

(B−2)　$P_{\mathrm{AA}}(n)$ と $P_{\mathrm{AC}}(n)$ を，それぞれ α と n を用いて表せ。

遺伝子の文字の配列が世代によって変化していく様子を考える。例えば，配列が

$$\mathrm{AAA} \rightarrow \mathrm{AAC}$$

と推移する確率は

$$(1-\alpha)^2 \times \frac{\alpha}{3}$$

である。

また，文字の配列が3世代目までに

$$\mathrm{AAAA} \rightarrow \mathrm{CAAA} \rightarrow \mathrm{CAAT} \rightarrow \mathrm{AACT}$$

と推移するとき，0番目の世代の最後の2文字AAが3番目の世代ではCTに変化している。N個の文字の配列からなる遺伝子について，n番目の世代の遺伝子の配列を0番目の世代と比較して，異なっている文字数の期待値をd_nとする。

(B-3)　d_nをα，n，Nを用いて表せ。

上の(**B-3**)で求めた式を用いることにより，2つ配列を比較して異なっている文字数を求めると，それらの間がおよそ何世代へだたっているかを推定することができる。

(B-4)　nを大きくしていくと，d_nの値は$0.75\,N$に近づくことを示せ。

第　2　問

部屋の温度など，時間によって変化する現象を理解するためには，注目している量が微小時間 Δt の間にどれだけ変化するかを，その現象を特徴付ける関係式に基づいて考察することが必要である。

A

室内に汚染質発生源があるとき，室内の空気の汚染質濃度の時間変化を考える。単位時間に室内で汚染質が q〔m^3/h〕増加する。また，換気によって，単位時間に室内の空気が V〔m^3/h〕排出され，同量の室外の空気が室内に流入する。室容積は W〔m^3〕とし，室外の汚染質濃度を ρ〔m^3/m^3〕とする。ここで，q，V，W，ρ は正の定数とする。このとき，室内の汚染質濃度 x〔m^3/m^3〕を時間 t の関数として以下のように記述しよう。ただし，室内に流入したり室内で発生したりする汚染質は瞬間的に拡散し，汚染質は吸着や化学変化を起こさず，空気の温度は変化しないものとする。

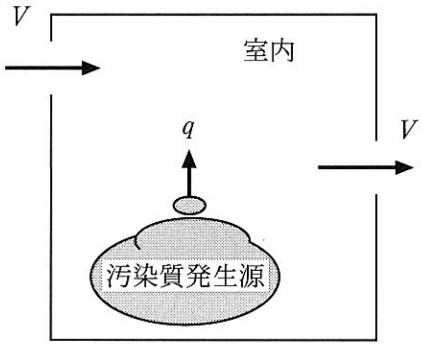

図 2 — 1

微小時間 Δt における室内の汚染質濃度の増分を Δx とすると，室内の汚染質の体積の増分 $W \cdot \Delta x$ は

$$q \cdot \Delta t + V\rho \cdot \Delta t - Vx \cdot \Delta t \qquad ①$$

で近似される。

等式

$$\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{q+V\rho-Vx}{W}$$

において，Δt を限りなく 0 に近づけることにより，関係式

$$\frac{dx}{dt}=\frac{q+V\rho-Vx}{W} \qquad ②$$

が得られる。

（A－1） 式①の各項がどのような量を表すかを，それぞれ述べよ。

（A－2） 室内の汚染質濃度 x がある値をとると，時間が変化してもその値が変化しなくなる。このような x の値を求めよ。

式②を変形すると，

$$\frac{1}{\frac{q}{V}+\rho-x}\cdot\frac{dx}{dt}=\frac{V}{W} \qquad ③$$

となる。

（A－3） 式③の左辺の t についての不定積分を x の関数として表せ。

式③の両辺を t について不定積分することにより，式②を満たす x は t の関数として，

$$x=\alpha+\beta e^{-\gamma t} \qquad ④$$

の形に表されることがわかる。ただし，α，β，γ は定数である。

（A－4） $t=0$ における x の値を x_0 として，式④の定数 α，β，γ を q，ρ，V，W，x_0 を用いて表せ。

B

質量 m〔kg〕の物体の空気中での落下運動を考える。鉛直下向きを正とする物体の速度を v〔m/s〕とおく。物体はその速度 v に比例した空気抵抗を受けると仮定すると，速度 v の時間変化は関係式

$$m\frac{dv}{dt} = mg - k(m)\,v \tag{5}$$

で表される。ここで，$k(m)$は正の値をとる m のある関数で時間 t によらず一定である。また，g は重力加速度を表す。

(B-1)　物体を落下させた後，十分時間が経つと物体の速度 v は一定値

$$\bar{v} = \frac{mg}{k(m)}$$

に近づく。この理由を説明せよ。

(B-2)　質量 m を変えて $\bar{v}$ を測定したところ，質量 m が大きいほど，$\bar{v}$ の値がつねに大きくなるという単調性が観測された。次の(イ)，(ロ)，(ハ)の形の関数が，$m > 0$ において，つねにこの条件を満たすかどうかを，それぞれ述べよ。

(イ)　$k(m) = am + b,\qquad a > 0,\ b > 0$

(ロ)　$k(m) = am^2 + b,\qquad a > 0,\ b > 0$

(ハ)　$k(m) = am^{\frac{1}{3}} + b,\qquad a > 0,\ b > 0$

(B-3)　式⑤を9ページの式②と比べ，本問における物体の落下速度 v を第2問**A**における室内の汚染質の濃度 x と対応させると，この2つの量の時間変化は同様の振る舞いをすることがわかる。この点に着目し，質量 m の物体を，初速度を0として，空気中で落下させたときの，物体の速度の時間変化を示すグラフの概形を描け。

C

ある国全体の時点tにおける生産量を$Y(t)$，資本量を$K(t)$，投資量を$I(t)$とする。ここで，tは0以上の実数であり，$Y(t)$，$K(t)$，$I(t)$は正の実数を値にもつ微分可能な関数とする。これらの関数の間には次の関係式が成立しているとする。

$$Y(t) = K(t)^{\frac{1}{2}} \qquad ⑥$$

$$I(t) = sY(t) \qquad ⑦$$

ここで，sは$0 < s < 1$を満たす定数で，貯蓄率とよばれる。生産量$Y(t)$は国民所得となり，その一部$sY(t)$が貯蓄にまわされる。ここでは，貯蓄がすべて投資に用いられると仮定し，このことから式⑦が導かれる。一方，資本量の時間変化は

$$\frac{d}{dt}K(t) = I(t) - rK(t) \qquad ⑧$$

で表されるとする。ここで，rは$0 < r < 1$を満たす定数で，減価償却率とよばれる。以下，$t = 0$における資本量は$K(0) = 1$で与えられるとする。

(C−1)　式⑥，⑦，⑧より，$\frac{d}{dt}Y(t)$を$Y(t)$とr，sを用いて表せ。

(C−2)　上の問で求めた関係式に第2問**A**と同様の方法を適用して，生産量$Y(t)$をtの関数としてr，sを用いて表せ。

生産量 $Y(t)$ のうち，貯蓄される分を除いた$(1 - s)Y(t)$が消費に費やされる。$C(t) = (1 - s)Y(t)$とおく。

(C−3)　消費量$C(t)$がtについての単調増加関数，単調減少関数，定数関数になるためのr，sの条件を，それぞれ求めよ。

(C−4)　すべての$t \geqq 0$においてつねに$C(t) \geqq c$を満たす実数cの中で最大の値を，最低消費量とよぶ。(**C−3**)のそれぞれの場合について最低消費量を求めよ。

(C−5)　与えられた減価償却率rに対して，最低消費量を最大にするような貯蓄率sを求めよ。