

**第2問** 電荷をもった粒子の運動を磁場により制御することを考える。重力の効果は無視できるものとして、以下の設問に答えよ。ただし、角度の単位はすべてラジアンとする。また、 $\theta$ を微小な角度とするとき、 $\cos\theta \cong 1$ 、 $\sin\theta \cong \theta$ 、 $\tan\theta \cong \theta$ と近似してよい。

- I 図2—1のように、 $|x| \leq \frac{d}{2}$ の領域Aにのみ、磁束密度が $y$ 座標にゆるやかに依存する磁場が $z$ 軸方向(紙面に垂直、手前向きを正)にかけられている。質量 $m$ 、正の電荷 $q$ をもつ粒子Pを、 $x$ 軸正方向に速さ $v$ で領域Aに入射する。
- (1) 領域Aを通過した結果、粒子Pの運動方向が微小な角度だけ曲がり、その $x$ 軸からの角度が $\theta$ となった。領域A内を通過する間、粒子の $y$ 座標の変化は小さく、粒子にはたらく磁束密度 $B$ はその間一定としてよいとする。このときの $\theta$ を求めよ。
- (2) 領域A内の磁束密度が $y$ 座標に比例し、正の定数 $b$ を用いて $B = by$ と表されるとき、粒子Pは入射時の $y$ 座標によらず $x$ 軸上の同じ点 $(x, y) = (f, 0)$ を通過する。このとき $f$ を求めよ。ただし、 $d$ は $f$ に比べて無視できるほど小さいとする。また、領域A内を通過する間、粒子の $y$ 座標の変化は小さく、粒子にはたらく磁束密度 $B$ はその間一定としてよいとする。
- (3) 図2—2(a)のように配置された電磁石の組の点線で囲まれた範囲(拡大図と座標を図2—2(b)に示す)を考える。鉄芯(しん)を適切な形に製作すると、 $z = 0$ の平面内で(2)のような磁場が実現できる。このとき、二つの電磁石に流す電流 $I_1$ 、 $I_2$ の向きはどうするべきか。それぞれの符号を答えよ。ただし、図中の矢印の向きを正とする。

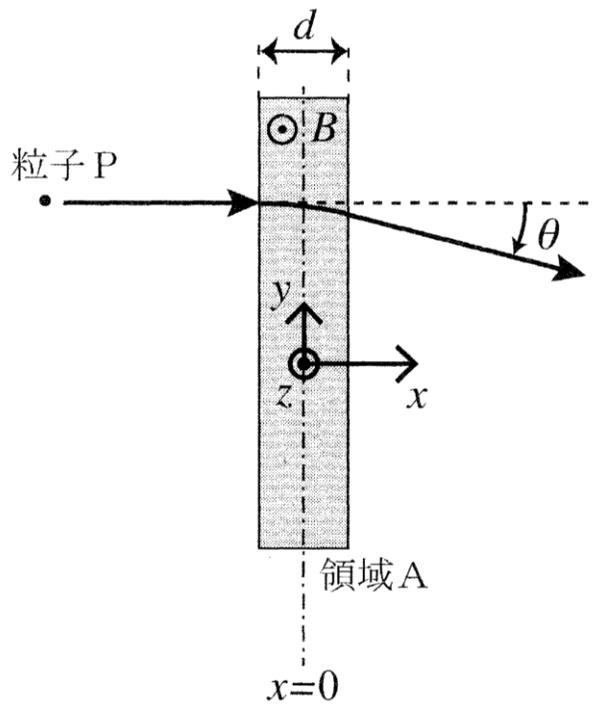


図 2—1

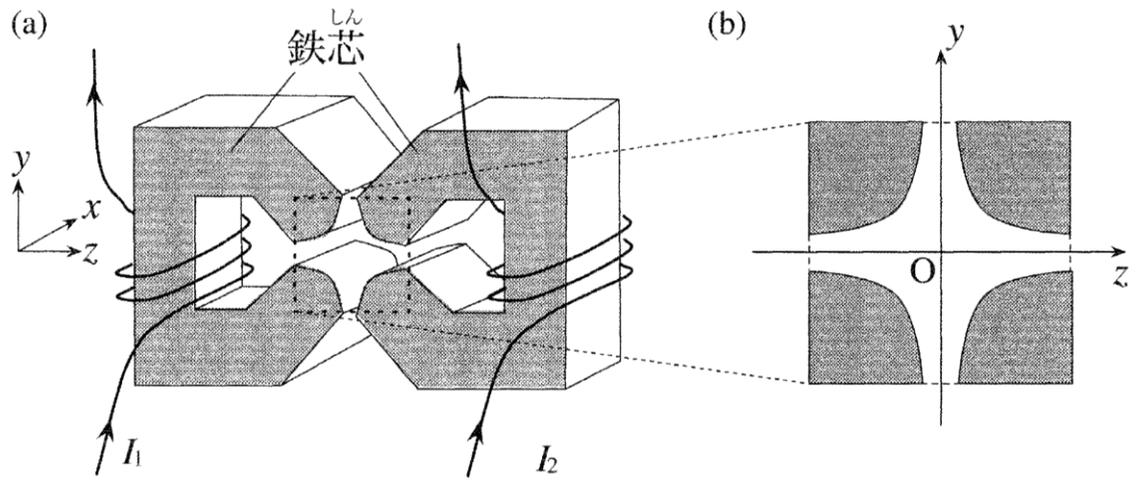


図 2—2

II 図 2—2(a)のように配置された電磁石の組を四重極電磁石と呼ぶ。四重極電磁石によって  $z = 0$  の平面内で I (2) のような磁場を実現したとき、図 2—3 のように、 $|x| \leq \frac{d}{2}$  の領域 C には、磁束密度が  $z$  座標にゆるやかに依存する磁場が  $y$  軸方向(紙面に垂直、表から裏への向きを正)にかけられることになる。さらに対称性から、 $y = 0$  の平面内で領域 C 内の磁束密度が  $z$  座標に比例し、 $B = bz$  と表されることもわかる(図 2—1 と図 2—3 とで正方向が逆であることに注意)。よって四重極電磁石の間を通過する粒子 P は、 $y$  軸方向には  $x$  軸に近づくように、 $z$  軸方向には  $x$  軸から離れるように、それぞれ I (1) で求めた角  $\theta$  だけ曲げられる。これは、領域 A が凸レンズ、領域 C が凹レンズのような役割をしていることに関連付けられる。ここでは、その軌跡を直線の方程式  $y = x \tan \varphi + h$  ( $0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2}$ ,  $h > 0$ ) と表すレーザー光線が照射されるようになっている  $xy$  平面にレンズを置くことを考える。必要であれば、レンズに入射する平行光線群は、光軸に斜めに入った場合でも平行に入った場合と同様に結像することを用いよ。

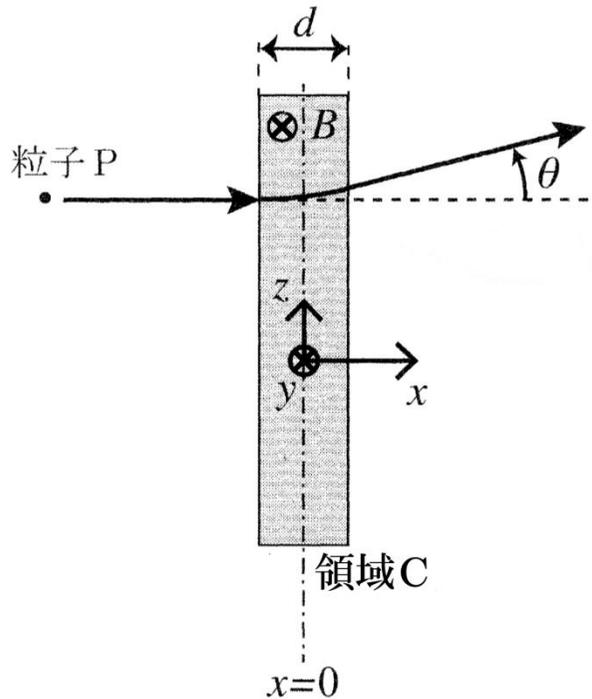


図 2—3

- (1) 図 2—4(a)のように，十分広く薄い凸レンズを  $y$  軸上に，その光軸が  $x$  軸と重なるよう設置した。レンズの焦点距離を  $F$  とするとき，凸レンズを通った後のレーザー光線の軌跡を表す方程式を求めよ。
- (2) 図 2—4(b)のように，十分広く薄い凹レンズを  $y$  軸上に，その光軸が  $x$  軸と重なるよう設置した。レンズの焦点距離を  $F$  とするとき，凹レンズを通った後のレーザー光線の軌跡を表す方程式を求めよ。
- (3) II(1)(2)で用いたのと同じ凸レンズと凹レンズを，図 2—5 のように距離  $F$  だけ遠ざけて設置した。このとき，凹レンズを通った後のレーザー光線の軌跡を表す方程式を求めよ。
- (4) II(1)(2)で用いたのと同じ凸レンズと凹レンズを複数用意して，図 2—6 のようにそれぞれ距離  $F$  だけ遠ざけて交互に設置した。このとき，レーザー光線が  $n$  枚目の凸レンズに入射するときの  $y$  座標を  $Y_n$  と表すことにすると， $\{Y_n\}$  は  $\phi$  にも  $h$  にもよらない周期  $N_1$  で変化する数列となった。この周期  $N_1$  を求めよ。

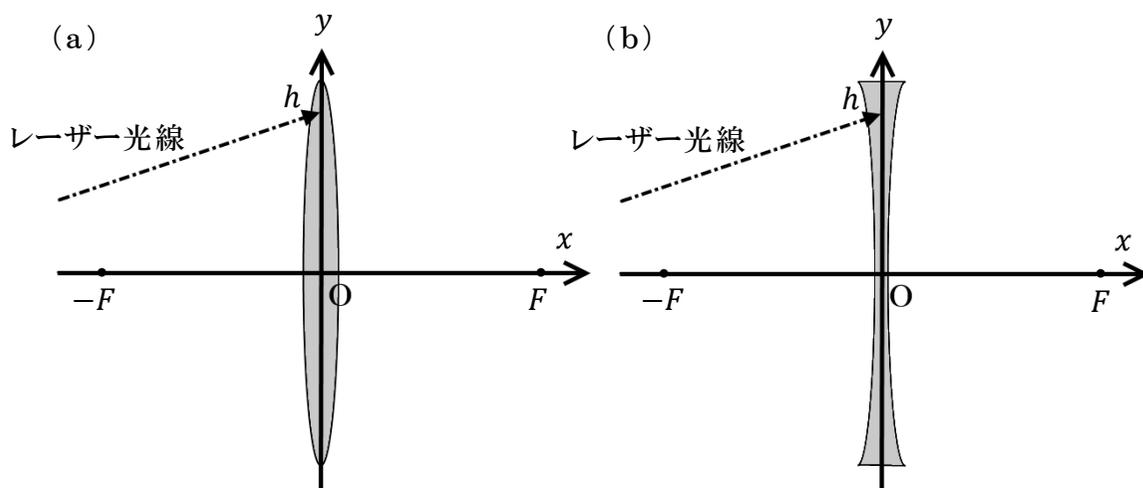


図 2—4

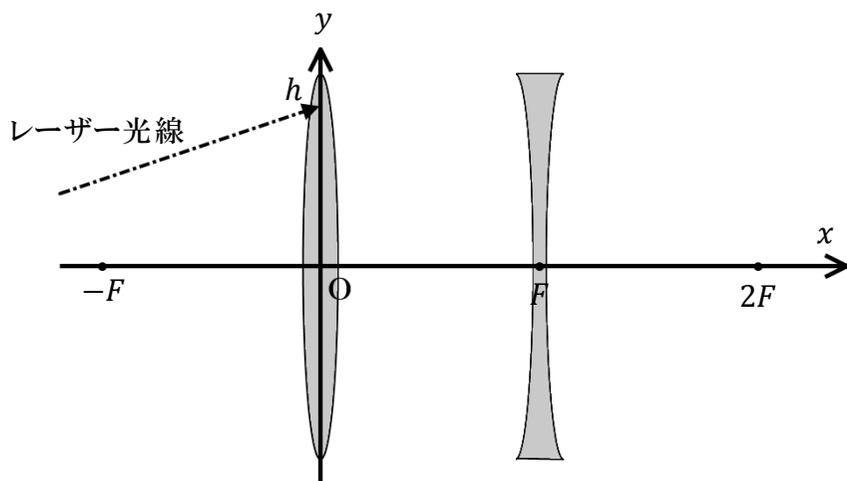


図 2—5

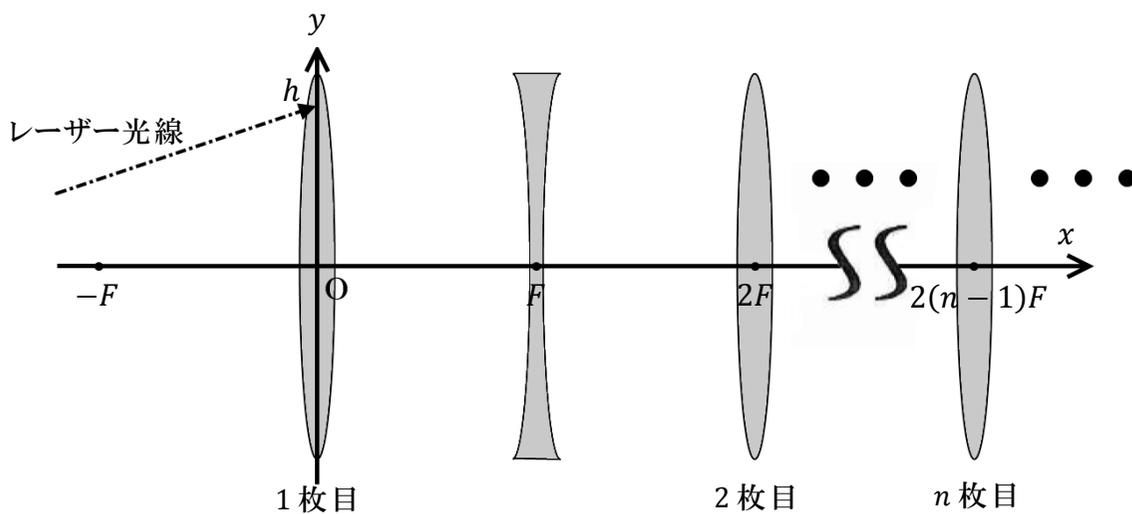


図 2—6

# 計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

Ⅲ  $z = 0$  の平面内で I (2) のような磁場が実現されるように電流を流した四重極電磁石を複数用意して、それぞれ距離  $f$  だけ遠ざけ縦と横の向きを交互に変えて並べ、図 2—7 のように領域 A と領域 C とが交互に並ぶようにした。ここで、粒子 P が  $n$  回目に通過する領域 A、領域 C をそれぞれ領域  $A_n$ 、領域  $C_n$  と呼ぶことにする。このとき、それぞれの領域には磁場が紙面に垂直にかけられており、その磁束密度は手前向きを正として、領域  $A_n$  内で  $B = by$ 、領域  $C_n$  内で  $B = -by$  と表されている。

- (1)  $\varphi$  を十分小さい正の角とする。方程式  $y = x \tan \varphi + h$  ( $h > 0$ ) の軌道に沿って領域  $A_1$  に入射した粒子 P が、領域  $A_n$  を通過するときの  $y$  座標を  $y_n$  と表すことにすると、 $\{y_n\}$  は  $\varphi$  にも  $h$  にもよらない周期  $N_2$  で変化する数列となった。この周期  $N_2$  を求めよ。ただし、複数の領域を通過した後の粒子の進行方向の変化は、それぞれの領域で I (1) のように求めた曲げ角の和として計算できるものとし、 $d$  は  $f$  に比べて無視できるほど小さいとしてよいとする。
- (2)  $y$  座標を 0 に収束させるだけならば、四重極電磁石の向きを変える必要はなく、 $z = 0$  の平面内に領域 A だけをずっと並べ続ければよいと考えられる。向きを交互に変えて並べないとどのような不都合が生じるか、簡潔に述べよ。
- (3) 領域 A は凸レンズと同様収束の、領域 C は凹レンズと同様発散の役割を担っているが、粒子 P が  $x$  軸のまわりを周期的に運動するということが、全体として収束の影響が強くなっているといえることができる。さらに、これまでの近似が十分成り立つ範囲で領域  $A_n$  と領域  $C_n$  の間隔を変えても、発散の影響が収束の影響を上回ることにはなかった。条件の同じ四重極電磁石を用いているにもかかわらず、このようになるのはなぜか、簡潔に述べよ。

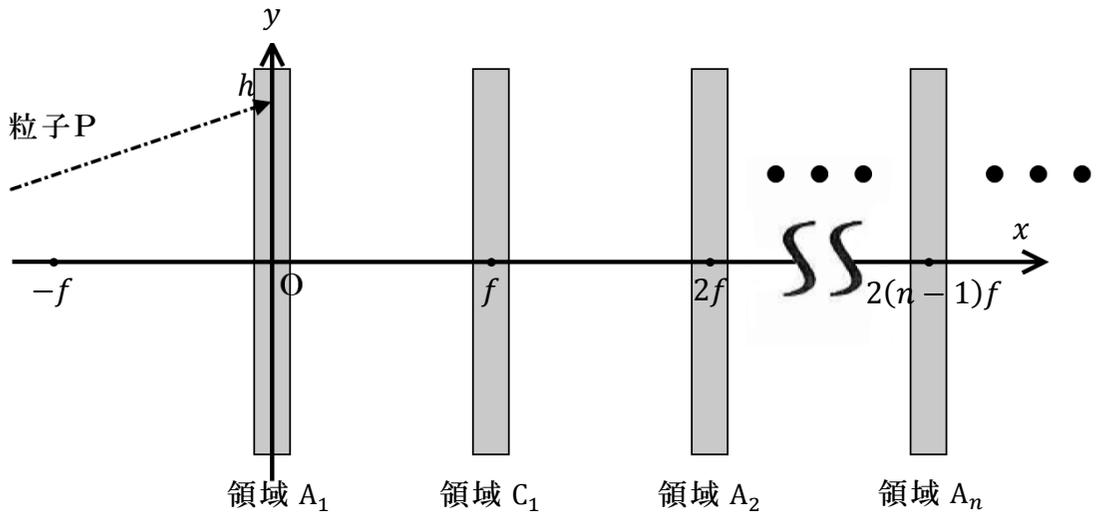


图 2—7