解答

I

(1)　粒子 P は領域 A 内で等速円運動を行うから、その軌道半径を R とおくと、運動方程式は

$$\frac{mv^2}{R} = qvB$$

と書ける．よって微小な曲げ角 θ は、

$$\theta \fallingdotseq \tan\theta = \frac{d}{R} = \underline{\frac{qBd}{mv}}$$

＜別解＞

粒子 P が受けるローレンツ力の y 成分は、$qvB\cos\theta \fallingdotseq qvB$ より領域 A 内でほぼ変わらないと見なせる

∴　θ が微小であることと合わせて、粒子 P は領域 A 内で、y 軸負方向に大きさ qvB のローレンツ力を常に受けつつ、x 軸方向には等速で運動していると近似できる．

このとき、領域 A を通過するのにかかる時間は d/v であるから、領域 A 通過後の速度の y 成分の大きさ v_y は、力積と運動量の変化の関係より

$$mv_y = qvB \cdot \frac{d}{v}$$

よって

$$\theta \fallingdotseq \tan\theta = \frac{v_y}{v} = \underline{\frac{qBd}{mv}}$$

(2)　題意より、

$$\frac{y}{f} = \tan\theta = \frac{qbd}{mv}y$$

よって

$$f = \underline{\frac{mv}{qbd}}$$

(3)　図 2―2(b)で、磁力線が左上→右上、右下→左下の向きになるように電流を流せば良いから、

$$\underline{I_1 > 0\,, I_2 < 0}$$

Ⅱ

(1)　レーザー光線に平行で､凸レンズの一方の焦点 $(-F, 0)$ を通る光とレンズの中心 $(0,0)$ を通る光の 2 本の光線を考える.

凸レンズ通過後、前者は光軸に平行に、後者はそのまま真っ直ぐ進むので、平行光線群の光源の実像の位置は点 $(F, F\tan\varphi)$ となることが分かる.

凸レンズは平行光線群を一点に収束させるから、レーザー光線もこの点を通るので、求める軌跡は

$$\underline{y = \frac{F\tan\varphi - h}{F}x + h}$$

(2)　レーザー光線に平行で、凹レンズの一方の焦点 $(F, 0)$ に向かう光とレンズの中心 $(0,0)$ を通る光の 2 本の光線を考える.

凹レンズ通過後、前者は光軸に平行に、後者はそのまま真っ直ぐ進むが、この軌跡を $x < 0$ の領域に延長すると、平行光線群の光源の虚像の位置は点 $(-F, -F\tan\varphi)$ となることが分かる.

レーザー光線もこの点から出てきたように見えるので、求める軌跡は

$$\underline{y = \frac{F\tan\varphi + h}{F}x + h}$$

(3)　Ⅱ(1)(2) の結果から、レーザー光線の傾きは凸レンズによって(レンズ入射時の y 座標)／F だけ小さく、凹レンズによって(レンズ入射時の y 座標)／F だけ大きくなることが分かる。

凸レンズによって曲げられたレーザー光線が凹レンズに入射する座標が $(F, F\tan\varphi)$ となることに注意して、これを用いて計算すれば、求める軌跡は

$$\underline{y = \frac{2F\tan\varphi - h}{F}x + h - F\tan\varphi}$$

(4)　レーザー光線が n 枚目の凸レンズに入射するときの傾きを M_n と表すことにすると、Ⅱ(3)と同様の計算から、漸化式

$$M_{n+1} = 2M_n - \frac{Y_n}{F}$$

$$Y_{n+1} = 3FM_n - Y_n$$

が得られる.　これを整理すると、

$$Y_{n+2} = Y_{n+1} - Y_n$$

となるから、これを繰り返し用いて、

$$\begin{aligned} Y_{n+3} &= Y_{n+2} - Y_{n+1} \\ &= (Y_{n+1} - Y_n) - Y_{n+1} \\ &= -Y_n \end{aligned}$$

∴　$Y_{n+6} = Y_n$ が任意の n に対して成り立つから、この数列の φ にも h にもよらない周期 N_1 は $\underline{6}$.

Ⅲ

(1)　Ⅰ(2)より、領域Aは P の軌道の傾きを h/f だけ減少させる.
　また、Ⅰ(1)(2)と同様に考えれば、領域Cは P の軌道の傾きを h/f だけ増加させる.

∴　Ⅱ(1)(2)と見比べれば、領域 A、領域 C を通過する粒子 P の振る舞いは、凸レンズ、凹レンズを通過する光線のものにそれぞれ等しいので、行うべき計算はⅡ(4)と同様となるから、

$$N_2 = \underline{6}$$

(2)　$z=0$ の平面内に領域Aだけをずっと並べれば,$y=0$ の平面内に領域Cだけがずっと並ぶことになり、xy 平面上では粒子の軌跡が収束しても、xz 平面上で軌道がどんどん逸れていってしまう.

(3)　磁束密度の大きさは x 軸から離れるほど大きくなるので、Ⅰ(1)よりそれぞれの領域による曲げ角の大きさも x 軸から離れるほど大きくなるが、基本的には領域 A_{n+1} には領域 C_n で外側に曲げられた粒子が、領域 C_n には領域 A_n で内側に曲げられた粒子が入射するので、収束の影響が強くなる.

＜補足＞

　Ⅲ(1)で見たように、入射時の y 座標が等しければ、領域 A の内側への曲げ角と領域 C の外側への曲げ角は等しくなり、Ⅰ(1)の通り磁束密度の高い外側ほど曲げ角は大きくなる.

　領域 A_n 通過後粒子 P が内側へ進めば、領域 C_n 入射時の y 座標は y_n よりも小さいので、領域 C_n での外側への曲げ角は領域 A_n での内側への曲げ角よりも小さくなり、しばらく発散することはない.

　領域 A_n 通過後粒子 P が外側へ進めば、領域 C_n 入射時の y 座標は y_n よりも大きいので、領域 C_n での外側への曲げ角は領域 A_n での内側への曲げ角よりも大きくなり、その後も外側へ進むが、領域 A_{n+1} ではさらに大きく内側へ曲げられるので、このプロセスを繰り返す中でいずれ必ず粒子 P が領域 A 通過後に内側へ進むことになる.
　よってこの後もしばらく発散しない.

　以上の議論が適用できないのは粒子 P が x 軸を途中で越える場合で、このとき外側への曲げ角が急激に大きくなり得るが、また上のプロセスを繰り返すので発散は起こらない.