理系のための東大文系数学
東京大学前期　2005 年　文系数学　第 3 問

0 以上の実数 s, t が $s^2+t^2=1$ をみたしながら動くとき，方程式 $$x^4-2(s+t)x^2+(s-t)^2=0$$ の解のとる値の範囲を求めよ。

＜略解＞

$s+t=k$ とおき，さらに $(s,t)=(\cos\theta, \sin\theta)$ $\left(0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\right)$ とおくと，

$$k=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$$

となるから，$1 \leqq k \leqq \sqrt{2}$　……①

また，$s^2+t^2=1$ より $2st=k^2-1$ となるから，与えられた方程式は

$$k^2+2x^2k-x^4-2=0$$

と整理できる.

これを k についての 2 次方程式と見れば，これが①の範囲に解をもつような x の範囲を考えればよい.

$$f(k)=k^2+2x^2k-x^4-2$$

とおくと，求める条件は

$$f(1)\cdot f(\sqrt{2}) \leqq 0$$

これを解いて，

$$0 \leqq x^2 \leqq 2\sqrt{2}$$

∴　与えられた方程式の解が取り得る値の範囲は

$$-2^{\frac{3}{4}} \leqq x \leqq 2^{\frac{3}{4}}$$

……（答）