理系のための東大文系数学
東京大学前期　2008 年　文系数学　第 3 問

座標平面上の 3 点 A $(1,0)$, B $(-1,0)$, C $(0,-1)$ に対し,

$$\angle \mathrm{APC} = \angle \mathrm{BPC}$$

をみたす点 P の軌跡を求めよ。ただし P≠A, B, C とする。

＜略解＞

P (x,y) とおき， x と y のみたすべき関係式を求める.

まず，P≠A, B, C より，$(x,y) \neq (\pm 1,0),(0,-1)$　……①

また，∠APC＝∠BPC のとき，$\cos\angle\mathrm{APC} = \cos\angle\mathrm{BPC}$　すなわち

$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PA}}||\overrightarrow{\mathrm{PC}}|} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{PB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PB}}||\overrightarrow{\mathrm{PC}}|} \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PC}}\right)|\overrightarrow{\mathrm{PB}}| = \left(\overrightarrow{\mathrm{PB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PC}}\right)|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|$$

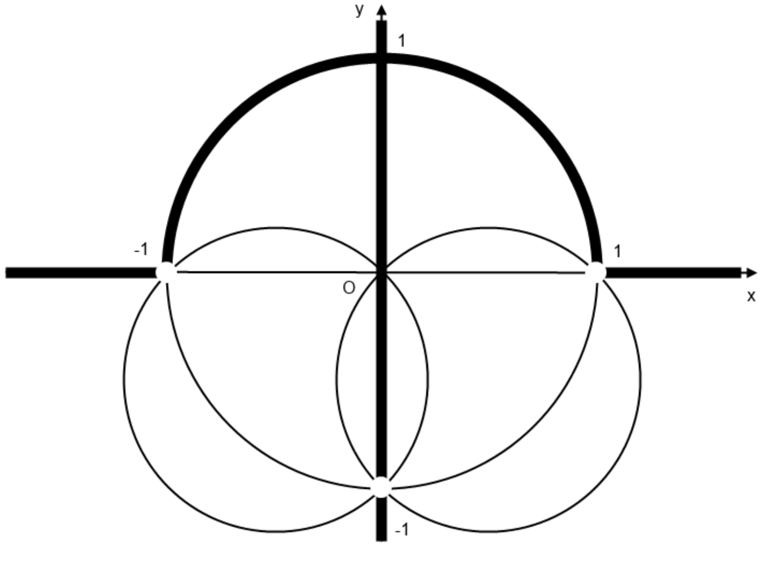
となるから，これに $\overrightarrow{\mathrm{PA}} = (1-x,-y), \overrightarrow{\mathrm{PB}} = (-x-1,-y), \overrightarrow{\mathrm{PC}} = (-x,-1-y)$ を代入して整理すれば，

$$(x^2-x+y^2+y)\sqrt{(x+1)^2+y^2} = (x^2+x+y^2+y)\sqrt{(x-1)^2+y^2}$$

⇔「x^2-x+y^2+y と x^2+x+y^2+y とが異符号でない」かつ　$xy(x^2+y^2-1)=0$

⇔　$\left\{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\right\}\left\{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\right\} \geqq 0$　かつ「$x=0$ または $y=0$ または $x^2+y^2=1$」

……②



∴　点 P (x,y) のみたすべき条件は①かつ②であり、図示すると左図の白丸を除く太線部となる.

……（答）