第　1　問

実数 a, b に対し平面上の点 $\mathrm{P}_n(x_n,\ y_n)$ を

$$(x_0,\ y_0) = (1,\ 0)$$
$$(x_{n+1},\ y_{n+1}) = (ax_n - by_n,\ bx_n + ay_n) \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

によって定める。このとき，次の条件 (i)，(ii) がともに成り立つような $(a,\ b)$ をすべて求めよ。

(i)　$\mathrm{P}_0 = \mathrm{P}_6$

(ii)　$\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3, \mathrm{P}_4, \mathrm{P}_5$ は相異なる。

第　2　問

a を実数とし，$x > 0$ で定義された関数 $f(x)$，$g(x)$ を次のように定める。

$$f(x) = \frac{\cos x}{x}$$
$$g(x) = \sin x + ax$$

このとき $y = f(x)$ のグラフと $y = g(x)$ のグラフが $x > 0$ において共有点をちょうど 3 つ持つような a をすべて求めよ。

第　3　問

A，B の 2 人がいる。投げたとき表裏の出る確率がそれぞれ $\frac{1}{2}$ のコインが 1 枚あり，最初は A がそのコインを持っている。次の操作を繰り返す。

(i)　A がコインを持っているときは，コインを投げ，表が出れば A に 1 点を与え，コインは A がそのまま持つ。裏が出れば，両者に点を与えず，A はコインを B に渡す。

(ii)　B がコインを持っているときは，コインを投げ，表が出れば B に 1 点を与え，コインは B がそのまま持つ。裏が出れば，両者に点を与えず，B はコインを A に渡す。

そして A，B のいずれかが 2 点を獲得した時点で，2 点を獲得した方の勝利とする。たとえば，コインが表，裏，表，表と出た場合，この時点で A は 1 点，B は 2 点を獲得しているので B の勝利となる。

(1)　A，B あわせてちょうど n 回コインを投げ終えたときに A の勝利となる確率 $p(n)$ を求めよ。

(2)　$\sum_{n=1}^{\infty} p(n)$ を求めよ。

第　4　問

$\triangle$ABC において $\angle \mathrm{BAC} = 90°$，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = 1$，$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}| = \sqrt{3}$ とする。$\triangle$ABC の内部の点 P が

$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|} + \frac{\overrightarrow{\mathrm{PB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|} + \frac{\overrightarrow{\mathrm{PC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|} = \overrightarrow{0}$$

を満たすとする。

(1)　$\angle \mathrm{APB}$，$\angle \mathrm{APC}$ を求めよ。

(2)　$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|$，$|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|$，$|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|$ を求めよ。

第　5　問

次の命題 P を証明したい。

命題 P　次の条件 (a), (b) をともに満たす自然数（1 以上の整数）A が存在する。

(a)　A は連続する 3 つの自然数の積である。

(b)　A を 10 進法で表したとき，1 が連続して 99 回以上現れるところがある。

以下の問いに答えよ。

(1)　y を自然数とする。このとき不等式

$$x^3 + 3yx^2 < (x + y - 1)(x + y)(x + y + 1) < x^3 + (3y + 1)x^2$$

が成り立つような正の実数 x の範囲を求めよ。

(2)　命題 P を証明せよ。

第　6　問

座標空間において，xy 平面内で不等式 $|x| \leqq 1$，$|y| \leqq 1$ により定まる正方形 S の 4 つの頂点を A$(-1, 1, 0)$，B$(1, 1, 0)$，C$(1, -1, 0)$，D$(-1, -1, 0)$ とする。正方形 S を，直線 BD を軸として回転させてできる立体を V_1，直線 AC を軸として回転させてできる立体を V_2 とする。

(1)　$0 \leqq t < 1$ を満たす実数 t に対し，平面 $x = t$ による V_1 の切り口の面積を求めよ。

(2)　V_1 と V_2 の共通部分の体積を求めよ。