入学試験問題 前

数　学(理科)

(配点 120 点)

平成 23 年 2 月 25 日　　14 時—16 時 30 分

注　意　事　項

1 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いてはいけません。

2 この問題冊子は全部で 20 ページあります。落丁，乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら，手を挙げて監督者に知らせなさい。

3 解答には，必ず黒色鉛筆(または黒色シャープペンシル)を使用しなさい。

4 2 枚の解答用紙が渡されますが，青色刷りの第 1 解答用紙には，第 1 問〜第 3 問について，茶色刷りの第 2 解答用紙には，第 4 問〜第 6 問について解答しなさい。

5 **解答用紙の指定欄に，受験番号(表面 2 箇所，裏面 1 箇所)，科類，氏名を記入しなさい。指定欄以外にこれらを記入してはいけません。**

6 **解答は，必ず解答用紙の指定された箇所に記入しなさい。**

7 **解答用紙の解答欄に，関係のない文字，記号，符号などを記入してはいけません。また，解答用紙の欄外の余白には，何も書いてはいけません。**

8 この問題冊子の余白は，計算用に使用してもよいが，どのページも切り離してはいけません。

9 解答用紙は，持ち帰ってはいけません。

10 試験終了後，問題冊子は持ち帰りなさい。

第　1　問

座標平面において，点P(0，1)を中心とする半径1の円をCとする。aを$0 < a < 1$を満たす実数とし，直線$y = a(x + 1)$とCとの交点をQ，Rとする。

(1)　△PQRの面積$S(a)$を求めよ。

(2)　aが$0 < a < 1$の範囲を動くとき，$S(a)$が最大となるaを求めよ。

第　2　問

実数 x の小数部分を，$0 \leqq y < 1$ かつ $x - y$ が整数となる実数 y のこととし，これを記号 $\langle x \rangle$ で表す。実数 a に対して，無限数列 $\{a_n\}$ の各項 a_n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を次のように順次定める。

(i)　$a_1 = \langle a \rangle$

(ii)　$\begin{cases} a_n \neq 0 \text{ のとき，} a_{n+1} = \left\langle \dfrac{1}{a_n} \right\rangle \\ a_n = 0 \text{ のとき，} a_{n+1} = 0 \end{cases}$

(1)　$a = \sqrt{2}$ のとき，数列 $\{a_n\}$ を求めよ。

(2)　任意の自然数 n に対して $a_n = a$ となるような $\dfrac{1}{3}$ 以上の実数 a をすべて求めよ。

(3)　a が有理数であるとする。a を整数 p と自然数 q を用いて $a = \dfrac{p}{q}$ と表すとき，q 以上のすべての自然数 n に対して，$a_n = 0$ であることを示せ。

第　3　問

Lを正定数とする。座標平面のx軸上の正の部分にある点$\mathrm{P}(t,\ 0)$に対し，原点Oを中心とし点Pを通る円周上を，Pから出発して反時計回りに道のりLだけ進んだ点を$\mathrm{Q}(u(t),\ v(t))$と表す。

(1)　$u(t)$，$v(t)$を求めよ。

(2)　$0<a<1$の範囲の実数aに対し，積分

$$f(a)=\int_a^1\sqrt{\{u'(t)\}^2+\{v'(t)\}^2}\,dt$$

を求めよ。

(3)　極限$\displaystyle\lim_{a\to+0}\frac{f(a)}{\log a}$を求めよ。

第　4　問

座標平面上の1点$\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}\right)$をとる。放物線$y = x^2$上の2点$\mathrm{Q}(\alpha, \alpha^2)$，$\mathrm{R}(\beta, \beta^2)$を，3点P，Q，RがQRを底辺とする二等辺三角形をなすように動かすとき，$\triangle$PQRの重心$\mathrm{G}(X, Y)$の軌跡を求めよ。

第　5　問

p, q を 2 つの正の整数とする。整数 a, b, c で条件

$$-q \leqq b \leqq 0 \leqq a \leqq p, \quad b \leqq c \leqq a$$

を満たすものを考え，このような a, b, c を $[a,\ b\ ;c]$ の形に並べたものを $(p,\ q)$ パターンと呼ぶ。各 $(p,\ q)$ パターン $[a,\ b\ ;c]$ に対して

$$w([a,\ b\ ;c]) = p - q - (a + b)$$

とおく。

(1)　$(p,\ q)$ パターンのうち，$w([a,\ b\ ;c]) = -q$ となるものの個数を求めよ。
また，$w([a,\ b\ ;c]) = p$ となる $(p,\ q)$ パターンの個数を求めよ。

以下 $p = q$ の場合を考える。

(2)　s を整数とする。$(p,\ p)$ パターンで $w([a,\ b\ ;c]) = -p + s$ となるものの個数を求めよ。

(3)　$(p,\ p)$ パターンの総数を求めよ。

第　6　問

(1)　x，y を実数とし，$x > 0$ とする。t を変数とする 2 次関数 $f(t) = xt^2 + yt$ の $0 \leqq t \leqq 1$ における最大値と最小値の差を求めよ。

(2)　次の条件を満たす点 $(x,\ y)$ 全体からなる座標平面内の領域を S とする。

$x > 0$ かつ，実数 z で $0 \leqq t \leqq 1$ の範囲の全ての実数 t に対して

$$0 \leqq xt^2 + yt + z \leqq 1$$

を満たすようなものが存在する。

S の概形を図示せよ。

(3)　次の条件を満たす点 $(x,\ y,\ z)$ 全体からなる座標空間内の領域を V とする。

$0 \leqq x \leqq 1$ かつ，$0 \leqq t \leqq 1$ の範囲の全ての実数 t に対して，

$$0 \leqq xt^2 + yt + z \leqq 1$$

が成り立つ。

V の体積を求めよ。