第　5　問

行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が次の条件(D)を満たすとする。

(D)　A の成分 a, b, c, d は整数である。また，平面上の4点 $(0,\ 0)$, $(a,\ b)$, $(a+c,\ b+d)$, $(c,\ d)$ は，面積1の平行四辺形の4つの頂点をなす。

$B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおく。次の問いに答えよ。

(1)　行列 BA と $B^{-1}A$ も条件(D)を満たすことを示せ。

(2)　$c=0$ ならば，A に B, B^{-1} のどちらかを左から次々にかけることにより，4個の行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ のどれかにできることを示せ。

(3)　$|a| \geqq |c| > 0$ とする。BA, $B^{-1}A$ の少なくともどちらか一方は，それを $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ とすると

$$|x|+|z|<|a|+|c|$$

を満たすことを示せ。