第　2　問

n を 2 以上の整数とする。 平面上に $n+2$ 個の点 O, P_0, P_1, …, P_n があり， 次の 2 つの条件をみたしている。

① $\angle \mathrm{P}_{k-1}\mathrm{OP}_k = \dfrac{\pi}{n}$ $(1 \leqq k \leqq n)$， $\angle \mathrm{OP}_{k-1}\mathrm{P}_k = \angle \mathrm{OP}_0\mathrm{P}_1$ $(2 \leqq k \leqq n)$

② 線分 OP_0 の長さは 1，線分 OP_1 の長さは $1+\dfrac{1}{n}$ である。

(1) 線分 $\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k$ の長さを a_k とし，$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ とおくとき，$\lim_{n\to\infty} s_n$ を求めよ。

(2) $\triangle\ \mathrm{OP}_{k-1}\mathrm{P}_k$ の面積を b_k とし，$t_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$ とおくとき，$\lim_{n\to\infty} t_n$ を求めよ。

(3) 点 P_0, P_1, …, P_n を結ぶ n 本の線分からなる図形は，$n \to \infty$ の極限では曲線と見なせる。 点 O を極， 半直線 OP_0 を始線としたとき， この曲線 C の極方程式 $r = r(\theta)$ を， 点 P_k の位置を極座標で表すことにより求めよ。

(4) 等式

$$\int_0^{\pi} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta = \lim_{n\to\infty} s_n$$

が成り立つことを示せ。

(5) 等式

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi} r^2 d\theta = \lim_{n\to\infty} t_n$$

が成り立つことを示せ。