入学試験問題 ㊞

数　学(理科)

(配点 120 点)

平成 26 年 2 月 25 日　　14 時—16 時 30 分

注　意　事　項

1　試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いてはいけません。

2　この問題冊子は全部で 20 ページあります。落丁，乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら，手を挙げて監督者に知らせなさい。

3　解答には，必ず黒色鉛筆(または黒色シャープペンシル)を使用しなさい。

4　2 枚の解答用紙が渡されますが，青色刷りの第 1 解答用紙には，第 1 問～第 3 問について，茶色刷りの第 2 解答用紙には，第 4 問～第 6 問について解答しなさい。

5　**解答用紙の指定欄に，受験番号(表面 2 箇所，裏面 1 箇所)，科類，氏名を記入しなさい。指定欄以外にこれらを記入してはいけません。**

6　**解答は，必ず解答用紙の指定された箇所に記入しなさい。**

7　**解答用紙の解答欄に，関係のない文字，記号，符号などを記入してはいけません。また，解答用紙の欄外の余白には，何も書いてはいけません。**

8　この問題冊子の余白は，計算用に使用してもよいが，どのページも切り離してはいけません。

9　解答用紙は，持ち帰ってはいけません。

10　試験終了後，問題冊子は持ち帰りなさい。

計　算　用　紙

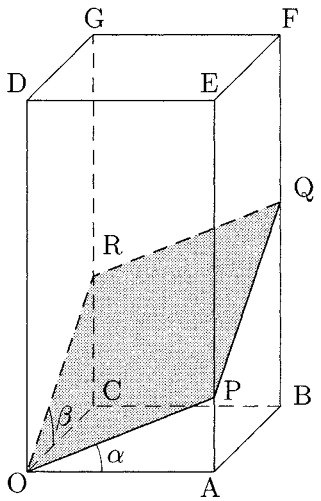
（切り離さないで用いよ。）

第　1　問

1 辺の長さが 1 の正方形を底面とする四角柱 OABC－DEFG を考える。3 点 P，Q，R を，それぞれ 辺AE，辺BF，辺CG 上に，4 点 O，P，Q，R が同一平面上にあるようにとる。四角形 OPQR の面積を S とおく。また，$\angle$AOP を α，$\angle$COR を β とおく。

(1)　S を $\tan\alpha$ と $\tan\beta$ を用いて表せ。

(2)　$\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4}$，$S=\dfrac{7}{6}$ であるとき，$\tan\alpha+\tan\beta$ の値を求めよ。さらに，$\alpha \leqq \beta$ のとき，$\tan\alpha$ の値を求めよ。



計　算　用　紙

（切り離さないで用いよ。）

第　2　問

a を自然数（すなわち 1 以上の整数）の定数とする。

白球と赤球があわせて 1 個以上入っている袋 U に対して，次の操作 $(*)$ を考える。

$(*)$　袋 U から球を 1 個取り出し，

(i)　取り出した球が白球のときは，袋 U の中身が白球 a 個，赤球 1 個となるようにする。

(ii)　取り出した球が赤球のときは，その球を袋 U へ戻すことなく，袋 U の中身はそのままにする。

はじめに袋 U の中に，白球が $a+2$ 個，赤球が 1 個入っているとする。この袋 U に対して操作 $(*)$ を繰り返し行う。

たとえば，1 回目の操作で白球が出たとすると，袋 U の中身は白球 a 個，赤球 1 個となり，さらに 2 回目の操作で赤球が出たとすると，袋 U の中身は白球 a 個のみとなる。

n 回目に取り出した球が赤球である確率を p_n とする。ただし，袋 U の中の個々の球の取り出される確率は等しいものとする。

(1)　p_1，p_2 を求めよ。

(2)　$n \geqq 3$ に対して p_n を求めよ。

(3)　$\displaystyle\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m} p_n$ を求めよ。

計　算　用　紙

（切り離さないで用いよ。）

第　3　問

u を実数とする。座標平面上の 2 つの放物線

$$C_1:\quad y=-x^2+1$$
$$C_2:\quad y=(x-u)^2+u$$

を考える。C_1 と C_2 が共有点をもつような u の値の範囲は，ある実数 a，b により，$a \leqq u \leqq b$ と表される。

(1)　a，b の値を求めよ。

(2)　u が $a \leqq u \leqq b$ をみたすとき，C_1 と C_2 の共有点を $\mathrm{P}_1(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{P}_2(x_2,\ y_2)$ とする。ただし，共有点が 1 点のみのときは，P_1 と P_2 は一致し，ともにその共有点を表すとする。

$$2\left|x_1 y_2 - x_2 y_1\right|$$

を u の式で表せ。

(3)　(2) で得られる u の式を $f(u)$ とする。定積分

$$I=\int_a^b f(u)\,du$$

を求めよ。

計　算　用　紙

（切り離さないで用いよ。）

第　4　問

p，q は実数の定数で，$0 < p < 1$，$q > 0$ をみたすとする。関数

$$f(x) = (1-p)x + (1-x)(1-e^{-qx})$$

を考える。

以下の問いに答えよ。必要であれば，不等式 $1 + x \leqq e^x$ がすべての実数 x に対して成り立つことを証明なしに用いてよい。

(1)　$0 < x < 1$ のとき，$0 < f(x) < 1$ であることを示せ。

(2)　x_0 は $0 < x_0 < 1$ をみたす実数とする。数列 $\{x_n\}$ の各項 x_n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を，

$$x_n = f(x_{n-1})$$

によって順次定める。$p > q$ であるとき，

$$\lim_{n \to \infty} x_n = 0$$

となることを示せ。

(3)　$p < q$ であるとき，

$$c = f(c), \quad 0 < c < 1$$

をみたす実数 c が存在することを示せ。

計　算　用　紙

（切り離さないで用いよ。）

第　5　問

r を 0 以上の整数とし，数列 $\{a_n\}$ を次のように定める。

$$a_1 = r, \quad a_2 = r + 1, \quad a_{n+2} = a_{n+1}(a_n + 1) \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

また，素数 p を 1 つとり，a_n を p で割った余りを b_n とする。ただし，0 を p で割った余りは 0 とする。

(1)　自然数 n に対し，b_{n+2} は $b_{n+1}(b_n + 1)$ を p で割った余りと一致することを示せ。

(2)　$r = 2$，$p = 17$ の場合に，10 以下のすべての自然数 n に対して，b_n を求めよ。

(3)　ある 2 つの相異なる自然数 n，m に対して，

$$b_{n+1} = b_{m+1} > 0, \quad b_{n+2} = b_{m+2}$$

が成り立ったとする。このとき，$b_n = b_m$ が成り立つことを示せ。

(4)　a_2，a_3，a_4，$\cdots$ に p で割り切れる数が現れないとする。このとき，a_1 も p で割り切れないことを示せ。

計 算 用 紙

（切り離さないで用いよ。）

第　6　問

座標平面の原点をOで表す。

線分 $y = \sqrt{3}x \ (0 \leqq x \leqq 2)$ 上の点 P と，線分 $y = -\sqrt{3}x \ (-2 \leqq x \leqq 0)$ 上の点 Q が，線分 OP と 線分 OQ の長さの和が 6 となるように動く。このとき，線分 PQ の通過する領域を D とする。

(1)　s を $0 \leqq s \leqq 2$ をみたす実数とするとき，点 (s, t) が D に入るような t の範囲を求めよ。

(2)　D を図示せよ。

計　算　用　紙

（切り離さないで用いよ。）

計　算　用　紙

（切り離さないで用いよ。）

計　算　用　紙

（切り離さないで用いよ。）

計　算　用　紙

（切り離さないで用いよ。）

計　算　用　紙

（切り離さないで用いよ。）

計　算　用　紙

（切り離さないで用いよ。）