以下の問いに答えよ。ただし,(1)については,結論のみを書けばよい。

(1)　n を正の整数とし, 3^n を 10 で割った余りを a_n とする。a_n を求めよ。

(2)　n を正の整数とし, 3^n を 4 で割った余りを b_n とする。b_n を求めよ。

(3)　数列 $\{x_n\}$ を次のように定める。

$$x_1 = 1, \qquad x_{n+1} = 3^{x_n} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

x_{10} を 10 で割った余りを求めよ。

＜略解＞

(1)

$3^4 = 81 \equiv 1 \pmod{10}$ より,任意の非負整数 k に対して,

$$3^{4k} = (3^4)^k \equiv 1 \pmod{10}$$
$$3^{4k+1} = 3 \cdot (3^4)^k \equiv 3 \pmod{10}$$
$$3^{4k+2} = 9 \cdot (3^4)^k \equiv 9 \pmod{10}$$
$$3^{4k+3} = 27 \cdot (3^4)^k \equiv 7 \pmod{10}$$

が成り立つ．よって,

$$a_n = \begin{cases} 3 & (n \text{ が 4 で割って 1 余る数のとき}) \\ 9 & (n \text{ が 4 で割って 2 余る数のとき}) \\ 7 & (n \text{ が 4 で割って 3 余る数のとき}) \\ 1 & (n \text{ が 4 の倍数のとき}) \end{cases}$$

……（答）

(2)

$3^2 = 9 \equiv 1 \pmod{4}$ より,任意の非負整数 k に対して,

$$3^{2k} = (3^2)^k \equiv 1 \pmod{4}$$
$$3^{2k+1} = 3 \cdot (3^2)^k \equiv 3 \pmod{4}$$

が成り立つ。よって,

$$b_n = \begin{cases} 3 & (n \text{ が奇数のとき}) \\ 1 & (n \text{ が偶数のとき}) \end{cases}$$

……（答）

(3)

定義式から,数列 $\{x_n\}$ は自然数の列であると言えるから, $x_8 = 3^{x_7}$ は奇数である.

∴　(2)より, $x_9 = 3^{x_8}$ を 4 で割った余りは 3 であると言えるので,(1)より, $x_{10} = 3^{x_9}$ を 10 で割った余りは

……（答）