理系のための東大文系数学
東京大学前期　2013 年　文系数学　第 2 問

座標平面上の 3 点

$$\mathrm{P}(0,-\sqrt{2}),\qquad \mathrm{Q}(0,\sqrt{2}),\qquad \mathrm{A}\left(a,\sqrt{a^2+1}\right)\quad (0 \leqq a \leqq 1)$$

を考える。

(1)　2 つの線分の長さの差 $\mathrm{PA}-\mathrm{AQ}$ は a によらない定数であることを示し，その値を求めよ。

(2)　Q を端点とし A を通る半直線と放物線 $y=\frac{\sqrt{2}}{8}x^2$ との交点を B とする。点 B から直線 $y=2$ へ下ろした垂線と直線 $y=2$ との交点を C とする。このとき，線分の長さの和

$$\mathrm{PA}+\mathrm{AB}+\mathrm{BC}$$

は a によらない定数であることを示し，その値を求めよ。

＜略解＞

(1)

$$\begin{aligned}
\mathrm{PA}-\mathrm{AQ} &= \sqrt{a^2+\left(\sqrt{a^2+1}+\sqrt{2}\right)^2}-\sqrt{a^2+\left(\sqrt{a^2+1}-\sqrt{2}\right)^2}\\
&= \sqrt{2a^2+3+2\sqrt{2(a^2+1)}}-\sqrt{2a^2+3-2\sqrt{2(a^2+1)}}\\
&= \left(\sqrt{2a^2+2}+1\right)-\left(\sqrt{2a^2+2}-1\right)\\
&= 2
\end{aligned}$$

……（答）

(2)

3 点 Q，A，B はこの順に同一直線上に並んでいるから，B $\left(b,\frac{\sqrt{2}}{8}b^2\right)$ とおくと，(1)より，

$$\begin{aligned}
\mathrm{PA}+\mathrm{AB}+\mathrm{BC} &= (\mathrm{QA}+2)+\mathrm{AB}+\mathrm{BC}\\
&= \mathrm{QB}+\mathrm{BC}+2\\
&= \sqrt{b^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{8}b^2-\sqrt{2}\right)^2}+\left(2-\frac{\sqrt{2}}{8}b^2\right)+2\\
&= \sqrt{\frac{2}{64}(b^4+16b^2+64)}+\left(2-\frac{\sqrt{2}}{8}b^2\right)+2\\
&= \frac{\sqrt{2}}{8}(b^2+8)+\left(2-\frac{\sqrt{2}}{8}b^2\right)+2\\
&= 4+\sqrt{2}
\end{aligned}$$

……（答）