

半径 1cm の半球形の器が水平から角  $\theta$  だけ傾けて固定されている。ただし  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  とする。この器に毎秒  $\frac{\pi}{18} \text{ cm}^3$  の割合で水を入れるとき、入れはじめてから  $3 + \cos^2 \theta$  秒後に器から水が流れ出した。このときの  $\theta$  の値を求めよ。

<略解>

水が流れ出した瞬間の容器内の水の体積は、半径 1 の球を、中心からの距離が  $\sin \theta$  である平面で切ったときの、球の中心を含まない方の立体の体積に等しい。

半径 1 の球を単位円の回転体と考えれば、水の体積は、

$$\int_{\sin \theta}^1 \pi (\sqrt{1-x^2})^2 dx = \frac{\pi}{3} (\sin^3 \theta - 3 \sin \theta + 2)$$

これが  $\frac{\pi}{18} (3 + \cos^2 \theta) = \frac{\pi}{18} (4 - \sin^2 \theta)$  に等しいから、

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{3} (\sin^3 \theta - 3 \sin \theta + 2) &= \frac{\pi}{18} (4 - \sin^2 \theta) \\ \Leftrightarrow (2 \sin \theta - 1)(\sin \theta + 2)(3 \sin \theta - 4) &= 0 \\ \therefore \theta &= \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

…… (答)