入 学 試 験 問 題　前

数　学(理科)

(配点 120 点)

平成 28 年 2 月 25 日　　14 時—16 時 30 分

注 意 事 項

1 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いてはいけません。

2 この問題冊子は全部で 20 ページあります。落丁，乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら，手を挙げて監督者に知らせなさい。

3 解答には，必ず黒色鉛筆(または黒色シャープペンシル)を使用しなさい。

4 2 枚の解答用紙が渡されますが，青色刷りの第 1 解答用紙には，第 1 問～第 3 問について，茶色刷りの第 2 解答用紙には，第 4 問～第 6 問について解答しなさい。

5 **解答用紙の指定欄に，受験番号(表面 2 箇所，裏面 1 箇所)，科類，氏名を記入しなさい。指定欄以外にこれらを記入してはいけません。**

6 **解答は，必ず解答用紙の指定された箇所に記入しなさい。**

7 **解答用紙の解答欄に，関係のない文字，記号，符号などを記入してはいけません。また，解答用紙の欄外の余白には，何も書いてはいけません。**

8 この問題冊子の余白は，計算用に使用してもよいが，どのページも切り離してはいけません。

9 解答用紙は，持ち帰ってはいけません。

10 試験終了後，問題冊子は持ち帰りなさい。

◇M4(494—54)

計　算　用　紙

（切り離さないで用いよ。）

第 1 問

e を自然対数の底, すなわち $e = \lim_{t \to \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t$ とする。すべての正の実数 x に対し, 次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x + \frac{1}{2}}$$

計　算　用　紙

（切り離さないで用いよ。）

第 2 問

A, B, C の3つのチームが参加する野球の大会を開催する。以下の方式で試合を行い, 2連勝したチームが出た時点で, そのチームを優勝チームとして大会は終了する。

(a) 1試合目でAとBが対戦する。

(b) 2試合目で, 1試合目の勝者と, 1試合目で待機していたCが対戦する。

(c) k 試合目で優勝チームが決まらない場合は, k 試合目の勝者と, k 試合目で待機していたチームが $k+1$ 試合目で対戦する。ここで k は2以上の整数とする。

なお, すべての対戦において, それぞれのチームが勝つ確率は $\dfrac{1}{2}$ で, 引き分けはないものとする。

(1) n を2以上の整数とする。ちょうど n 試合目でAが優勝する確率を求めよ。

(2) m を正の整数とする。総試合数が $3m$ 回以下でAが優勝したとき, Aの最後の対戦相手がBである条件付き確率を求めよ。

計 算 用 紙

（切り離さないで用いよ。）

第 3 問

a を $1 < a < 3$ をみたす実数とし，座標空間内の 4 点 $\mathrm{P}_1(1,0,1)$, $\mathrm{P}_2(1,1,1)$, $\mathrm{P}_3(1,0,3)$, $\mathrm{Q}(0,0,a)$ を考える。直線 $\mathrm{P}_1\mathrm{Q}$, $\mathrm{P}_2\mathrm{Q}$, $\mathrm{P}_3\mathrm{Q}$ と xy 平面の交点をそれぞれ R_1, R_2, R_3 として，三角形 $\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2\mathrm{R}_3$ の面積を $S(a)$ とする。$S(a)$ を最小にする a と，そのときの $S(a)$ の値を求めよ。

計 算 用 紙

（切り離さないで用いよ。）

第 4 問

zを複素数とする。複素数平面上の3点A(1), B(z), C(z^2)が鋭角三角形をなすようなzの範囲を求め，図示せよ。

計 算 用 紙

（切り離さないで用いよ。）

第 5 問

k を正の整数とし，10 進法で表された小数点以下 k 桁の実数

$$0.a_1a_2\cdots a_k = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_k}{10^k}$$

を 1 つとる。ここで, $a_1,\, a_2,\, \cdots,\, a_k$ は 0 から 9 までの整数で, $a_k \neq 0$ とする。

(1) 次の不等式をみたす正の整数 n をすべて求めよ。

$$0.a_1a_2\cdots a_k \leqq \sqrt{n} - 10^k < 0.a_1a_2\cdots a_k + 10^{-k}$$

(2) p が $5\cdot 10^{k-1}$ 以上の整数ならば，次の不等式をみたす正の整数 m が存在することを示せ。

$$0.a_1a_2\cdots a_k \leqq \sqrt{m} - p < 0.a_1a_2\cdots a_k + 10^{-k}$$

(3) 実数 x に対し，$r \leqq x < r+1$ をみたす整数 r を $[x]$ で表す。$\sqrt{s} - [\sqrt{s}\,] = 0.a_1a_2\cdots a_k$ をみたす正の整数 s は存在しないことを示せ。

計 算 用 紙

（切り離さないで用いよ。）

第 6 問

座標空間内を, 長さ 2 の線分 AB が次の 2 条件 (a), (b) をみたしながら動く。

(a) 点 A は平面 $z = 0$ 上にある。

(b) 点 $\mathrm{C}(0, 0, 1)$ が線分 AB 上にある。

このとき, 線分 AB が通過することのできる範囲を K とする。K と不等式 $z \geqq 1$ の表す範囲との共通部分の体積を求めよ。

計　算　用　紙

（切り離さないで用いよ。）

計　算　用　紙

（切り離さないで用いよ。）

計　算　用　紙

（切り離さないで用いよ。）

計 算 用 紙

（切り離さないで用いよ。）

計　算　用　紙

（切り離さないで用いよ。）

計　算　用　紙

（切り離さないで用いよ。）