入学試験問題　㊟前

数　学(理科)

(配点 120 点)

平成 30 年 2 月 25 日　　14 時—16 時 30 分

注　意　事　項

1　試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いてはいけません。

2　この問題冊子は全部で 20 ページあります。落丁，乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら，手を挙げて監督者に知らせなさい。

3　解答には，必ず黒色鉛筆(または黒色シャープペンシル)を使用しなさい。

4　2 枚の解答用紙が渡されますが，青色刷りの第 1 解答用紙には，第 1 問～第 3 問について，茶色刷りの第 2 解答用紙には，第 4 問～第 6 問について解答しなさい。

5　**解答用紙の指定欄に，受験番号(表面 2 箇所，裏面 1 箇所)，科類，氏名を記入しなさい。指定欄以外にこれらを記入してはいけません。**

6　**解答は，必ず解答用紙の指定された箇所に記入しなさい。**

7　**解答用紙の解答欄に，関係のない文字，記号，符号などを記入してはいけません。また，解答用紙の欄外の余白には，何も書いてはいけません。**

8　この問題冊子の余白は，計算用に使用してもよいが，どのページも切り離してはいけません。

9　解答用紙は，持ち帰ってはいけません。

10　試験終了後，問題冊子は持ち帰りなさい。

計　算　用　紙

（切り離さないで用いよ。）

第　1　問

関数

$$f(x) = \frac{x}{\sin x} + \cos x \qquad (0 < x < \pi)$$

の増減表をつくり，$x \to +0$, $x \to \pi - 0$ のときの極限を調べよ。

計 算 用 紙

（切り離さないで用いよ。）

第　2　問

数列 $a_1,\ a_2,\ \cdots\cdots$ を

$$a_n = \frac{{}_{2n+1}\mathrm{C}_n}{n!} \qquad (n = 1,\ 2,\ \cdots\cdots)$$

で定める。

(1) $n \geqq 2$ とする。$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$ を既約分数 $\dfrac{q_n}{p_n}$ として表したときの分母 $p_n \geqq 1$ と分子 q_n を求めよ。

(2) a_n が整数となる $n \geqq 1$ をすべて求めよ。

計　算　用　紙

（切り離さないで用いよ。）

第　3　問

放物線 $y = x^2$ のうち $-1 \leqq x \leqq 1$ をみたす部分を C とする。座標平面上の原点 O と点 A(1, 0) を考える。$k > 0$ を実数とする。点 P が C 上を動き，点 Q が線分 OA 上を動くとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \frac{1}{k}\overrightarrow{\mathrm{OP}} + k\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$$

をみたす点 R が動く領域の面積を $S(k)$ とする。

$S(k)$ および $\displaystyle\lim_{k \to +0} S(k)$, $\displaystyle\lim_{k \to \infty} S(k)$ を求めよ。

計　算　用　紙

（切り離さないで用いよ。）

第　4　問

$a > 0$ とし，

$$f(x) = x^3 - 3a^2x$$

とおく。次の2条件をみたす点 $(a,\ b)$ の動きうる範囲を求め，座標平面上に図示せよ。

条件1：方程式 $f(x) = b$ は相異なる3実数解をもつ。

条件2：さらに，方程式 $f(x) = b$ の解を $\alpha < \beta < \gamma$ とすると $\beta > 1$ である。

計 算 用 紙

（切り離さないで用いよ。）

第　5　問

複素数平面上の原点を中心とする半径 1 の円を C とする。点 $\mathrm{P}(z)$ は C 上にあり，点 $\mathrm{A}(1)$ とは異なるとする。点 P における円 C の接線に関して，点 A と対称な点を $\mathrm{Q}(u)$ とする。$w = \dfrac{1}{1-u}$ とおき，w と共役な複素数を $\overline{w}$ で表す。

(1) u と $\dfrac{\overline{w}}{w}$ を z についての整式として表し，絶対値の商 $\dfrac{|w+\overline{w}-1|}{|w|}$ を求めよ。

(2) C のうち実部が $\dfrac{1}{2}$ 以下の複素数で表される部分を C' とする。点 $\mathrm{P}(z)$ が C' 上を動くときの点 $\mathrm{R}(w)$ の軌跡を求めよ。

計　算　用　紙

（切り離さないで用いよ。）

第　6　問

座標空間内の 4 点 O(0, 0, 0), A(1, 0, 0), B(1, 1, 0), C(1, 1, 1) を考える。
$\frac{1}{2} < r < 1$ とする。点 P が線分 OA, AB, BC 上を動くときに点 P を中心とする半径 r の球（内部を含む）が通過する部分を，それぞれ V_1, V_2, V_3 とする。

(1) 平面 $y = t$ が V_1, V_3 双方と共有点をもつような t の範囲を与えよ。さらに，この範囲の t に対し，平面 $y = t$ と V_1 の共通部分および，平面 $y = t$ と V_3 の共通部分を同一平面上に図示せよ。

(2) V_1 と V_3 の共通部分が V_2 に含まれるための r についての条件を求めよ。

(3) r は (2) の条件をみたすとする。V_1 の体積を S とし，V_1 と V_2 の共通部分の体積を T とする。V_1, V_2, V_3 を合わせて得られる立体 V の体積を S と T を用いて表せ。

(4) ひきつづき r は (2) の条件をみたすとする。S と T を求め，V の体積を決定せよ。

計　算　用　紙

（切り離さないで用いよ。）

計　算　用　紙

（切り離さないで用いよ。）

計 算 用 紙

（切り離さないで用いよ。）

計　算　用　紙

（切り離さないで用いよ。）

計　算　用　紙

（切り離さないで用いよ。）

計　算　用　紙

（切り離さないで用いよ。）