

入学試験問題



総合科目 II

(配点 100 点)

平成 21 年 3 月 13 日 16 時 00 分—18 時 00 分

注意事項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 15 ページあります。
落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、手をあげて監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆(または黒色シャープペンシル)を使用しなさい。
- 4 2 枚の解答用紙が渡されるが、解答は、問題ごとに所定の解答用紙に記入しなさい。
- 5 各解答用紙の指定欄に、受験番号(第 1 面 2 箇所)、氏名を記入しなさい。指定欄以外にこれらを記入してはいけません。
- 6 解答は、必ず解答用紙の指定された箇所に記入しなさい。
- 7 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。また、解答用紙の欄外の余白には、何も書いてはいけません。
- 8 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 9 解答用紙は、持ち帰ってはいけません。
- 10 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

多くのデータを扱うことは、さまざまな分野で必要になる。大量のデータを整理する際に、ある基準によってデータの間には序列をつけることが有用である。また、データを転送するときには、ノイズによる転送の誤りの確率を小さくするような工夫が必要である。

A

n 種類の成分 A_1, \dots, A_n を混ぜ合わせて製品を作る。この製品に含まれる A_1, \dots, A_n の重さの比率のデータを p_1, \dots, p_n とする。ここで、 p_1, \dots, p_n は

$$\sum_{k=1}^n p_k = 1, 0 \leq p_k \leq 1, k = 1, \dots, n$$

を満たす実数である。また A_1, \dots, A_n の単位重量あたりの価格を x_1, \dots, x_n とする。ただし、 x_1, \dots, x_n は

$$x_k < x_{k+1}, k = 1, \dots, n-1$$

を満たす正の定数である。この製品の単位重量あたりの材料の費用は

$$v = \sum_{k=1}^n x_k p_k$$

で表される。

(A-1) 材料の費用 v が最小となるような、 p_1, \dots, p_n の値を求めよ。

(A-2) q_1, \dots, q_n も

$$\sum_{k=1}^n q_k = 1, 0 \leq q_k \leq 1, k = 1, \dots, n$$

を満たす実数とする。

すべての $m = 1, \dots, n-1$ に対して

$$\sum_{k=1}^m p_k \leq \sum_{k=1}^m q_k$$

となるとき、それぞれの製品の材料の費用について

$$\sum_{k=1}^n x_k q_k \leq \sum_{k=1}^n x_k p_k$$

が成り立つことを示せ。

(A-3) $n = 3$ とし、

$$p_1 \geq p_3, p_2 \geq p_3$$

が成り立つとする。このとき、材料の費用 v が最大となるような p_1, p_2, p_3 を求めよ。

B

コンピュータで扱うデータは、2つの数字0, 1からなる列として表されることが多い。数字0, 1からなる長さ n の列を、送信者Aから受信者Bに転送することを考える。情報を転送する際にノイズが入るために、0が1に、1が0に、それぞれ確率 p で入れ替わって伝わる。ここで、 p は $0 \leq p < 1$ を満たす定数である。

例えば、長さ8の数字の列01001100が

11001100

と伝わる確率は、1番目の数字のみが入れ替わっているので、 $p(1-p)^7$ である。

また01001100が

00011100

と伝わる確率は、2番目と4番目の数字が入れ替わっているので、 $p^2(1-p)^6$ である。

(B-1) 数字0, 1からなる長さ n の列を1回送るとき、誤って伝わる数字の個数が偶数個である確率を $P(n)$ とおく。ただし、誤りがない場合は0個の誤りがあったと考える。 $P(n+1)$ を p と $P(n)$ を用いて表せ。

(B-2) $P(n)$ を p と n を用いて表せ。

データが誤って伝わる確率を小さくするために、データを表す 0, 1 からなる n 個の数字の列の後に、データの中に 1 が奇数個あるときは 1 を、偶数個あるときは 0 を付け加えて、全部で $n + 1$ 個の数字の列を A から B に送る。この末尾に付け加える数字をパリティビットとよぶ。受信者 B は、パリティビットが、受け取ったデータの n 個の数字の中の 1 の個数と合っていれば、情報が正しく送られたと判断してそのまま情報を受け取る。合っていなければ、情報が誤って送られたと判断して、A に再度同じ情報、つまり n 個の数字の列とパリティビットを送ってもらう。この手続きを、受信者 B が、正しくデータを受信できたと判断するまで繰り返す。ただし、パリティビットも、他の n 個の数字と同様に確率 p で入れ替わって伝わる。

(B-3) 送信者 A が、 n 個の数字からなるデータとパリティビットを合わせて $n + 1$ 個の数字からなる列を 1 回目に送るとき、受信者 B が A に再送を要求する確率を p と n を用いて表せ。

(B-4) B がデータを正しく受信したと判断して通信が終了するまでに、A が送信する数字の個数の期待値を p と n を用いて表せ。

第 2 問

時間によって移動する点の動きなど、連続的に変化する現象を調べるときには、現象を表す関数の値を数列によって近似して、離散的なモデルを考えることができる。これらを対照して考察することや、連続的な現象を離散的なモデルの極限としてとらえることは、しばしば有効である。

A

数列 $\{a_n\}$ に対して、 $b_n = a_{n+1} - a_n$, $n = 1, 2, \dots$ とおく。数列 $\{b_n\}$ は

$$b_{n+1} = b_n + \frac{1}{a_n^2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

を満たすとする。また $a_1 = 1$, $b_1 = 1$ とする。

(A-1) $n = 1, 2, \dots$ について、

$$a_n \geq n$$

が成立することを示せ。

(A-2) すべての自然数 n について、

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} < 2$$

を示せ。

(A-3)

$$a_n \leq 3n - 2$$

となることを示せ。

数直線上を運動する点Pの座標を時間 t の関数として $x=f(t)$ で表す。ただし、 $t \geq 0$ とする。点Pの速度 $v(t)=f'(t)$ について

$$v'(t) = \frac{1}{f(t)^2}$$

が成立するとする。また、 $f(0)=1$ 、 $v(0)=1$ とする。ここで $f(t)$ 、 $v(t)$ は微分可能な関数であるとする。

(A-4) 不等式

$$f(t) \geq 1 + t$$

が成り立つことを示せ。

(A-5)

$$f(t) \leq 1 + 2t - \log(1 + t)$$

を示せ。ただし、 $\log(1 + t)$ は自然対数を表す。

B

図2—1のように、ひもの一方の端点を水平面に垂直な壁に固定し、もう一方の端点を壁とひものなす角が直角になるように手で持つ。このとき、手で持つ位置と壁の距離がどれくらいになるかを、次のように考察してみよう。

図2—2のように、質量が m [kg] のおもりを、いくつか等間隔にひもでつなぎ、その一方の端を壁に固定して、他方の端を手で支える。ただし、それぞれのひもはまっすぐで、壁に固定されているひもは壁に垂直であるとする。となり合うおもりの間隔は l [m] として、おもりの大きさとおもりの太さ、およびひもの重さは無視することにする。壁の側から順番に、ひもを S_1, S_2, \dots とし、それらのひもの張力の大きさを、それぞれ t_1, t_2, \dots [N] とする。また、ひも S_i が水平方向となす角度を θ_i とする。ここで、 $t_1 = T$ とおく。重力加速度を g [m/s²] とする。

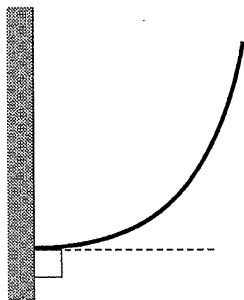


図2—1

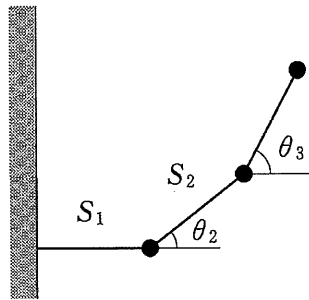


図2—2

図2—3は、ひも S_i と S_{i+1} でつながれているおもりにかかる力がつり合っていることを表す。ここで \vec{a}_i, \vec{a}_{i+1} は、それぞれひも S_i, S_{i+1} の張力としておもりにかかる力のベクトル、 \vec{b} はおもりにかかる重力のベクトルを表す。

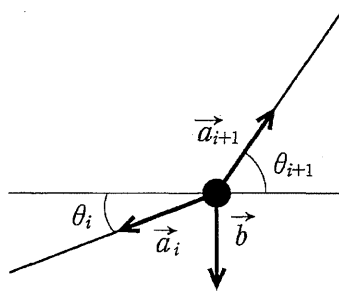


図 2—3

(B-1) ベクトル \vec{a}_i , \vec{a}_{i+1} , \vec{b} の大きさは、それぞれ t_i , t_{i+1} , mg であることをふまえて、これらのベクトルの成分表示を t_i , t_{i+1} , θ_i , θ_{i+1} , m , g を用いて与えよ。

おもりにかかる力のつり合いの条件より、ベクトル \vec{a}_i , \vec{a}_{i+1} , \vec{b} の和は零ベクトルである。

(B-2) $\tan \theta_i$ と $\tan \theta_{i+1}$ の関係を m , g , T を用いて表せ。

(B-3) $\cos \theta_i$ を m , g , T , i を用いて表せ。

(B-4) $x = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$ とおく置換積分法により、定積分

$$\int_0^a \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$$

の値を求めよ。

おもりの質量の和 M [kg] と、ひもの長さの和 L [m] を固定する。おもりの個数を n 個とすると、

$$m = \frac{M}{n}, \quad \ell = \frac{L}{n}$$

となる。このとき、ひもを手で支える位置と壁の距離を X_n [m] とおく。図 2—1 のように、質量が M [kg] で長さが L [m] のひもの一方の端点を壁に固定して、もう一方の端点を手で持ち、壁とひものなす角が直角になるようにする。このとき、手で持つ位置と壁の距離は、極限值

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} X_n$$

で表されると考えられる。

(B-5) 上の極限值 α を M , L , T , g を用いて表せ。