2008年度 東京大学 数学（理科）

東大入試ドットコム 編

※これは東京大学により作成された，同大学教養学部前期課程各類の入試問題です。
※東大入試ドットコムは問題の作成に一切関与しておらず，また問題の権利を一切保有しません。

第 1 問

座標平面の点 $(x,\, y)$ を $(3x+y,\, -2x)$ へ移す移動 f を考え，点 P が移る行き先を $f(\mathrm{P})$ と表す。f を用いて直線 $l_0,\, l_1,\, l_2,\, \cdots$ を以下のように定める。

・l_0 は直線 $3x+2y=1$ である。

・点 P が l_n 上を動くとき，$f(\mathrm{P})$ が描く直線を l_{n+1} とする $(n=0,\, 1,\, 2,\, \cdots)$。

以下 l_n を 1 次式を用いて $a_n x + b_n y = 1$ と表す。

(1) $a_{n+1},\, b_{n+1}$ を $a_n,\, b_n$ で表せ。

(2) 不等式 $a_n x + b_n y > 1$ が定める領域を D_n とする。$D_0,\, D_1,\, D_2,\, \cdots$ すべてに含まれるような点の範囲を図示せよ。

第 2 問

白黒 2 種類のカードがたくさんある。そのうち k 枚のカードを手もとにもっているとき，次の操作 (A) を考える。

(A) 手持ちの k 枚の中から 1 枚を，等確率 $\dfrac{1}{k}$ で選び出し，それを違う色のカードにとりかえる。

以下の問 (1)，(2) に答えよ。

(1) 最初に白 2 枚，黒 2 枚，合計 4 枚のカードをもっているとき，操作 (A) を n 回繰り返した後に初めて，4 枚とも同じ色のカードになる確率を求めよ。

(2) 最初に白 3 枚，黒 3 枚，合計 6 枚のカードをもっているとき，操作 (A) を n 回繰り返した後に初めて，6 枚とも同じ色のカードになる確率を求めよ。

第 3 問

(1) 正八面体のひとつの面を下にして水平な台の上に置く。この八面体を真上から見た図（平面図）を描け。

(2) 正八面体の互いに平行な 2 つの面をとり，それぞれの面の重心を G_1, G_2 とする。G_1, G_2 を通る直線を軸としてこの八面体を 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。ただし八面体は内部も含むものとし，各辺の長さは 1 とする。

第 4 問

放物線 $y = x^2$ 上に 2 点 P, Q がある。線分 PQ の中点の y 座標を h とする。

(1) 線分 PQ の長さ L と傾き m で，h を表せ。

(2) L を固定したとき，h がとりうる値の最小値を求めよ。

第 5 問

自然数 n に対し，$\dfrac{10^n-1}{9}=\overbrace{111\cdots111}^{n\text{ 個}}$ を $\boxed{n}$ で表す。たとえば $\boxed{1}=1$, $\boxed{2}=11$, $\boxed{3}=111$ である。

(1) m を 0 以上の整数とする。$\boxed{3^m}$ は 3^m で割り切れるが，3^{m+1} では割り切れないことを示せ。

(2) n が 27 で割り切れることが，$\boxed{n}$ が 27 で割り切れるための必要十分条件であることを示せ。

第 6 問

座標平面において，媒介変数 t を用いて

$$\begin{cases} x = \cos 2t \\ y = t \sin t \end{cases} \quad (0 \leqq t \leqq 2\pi)$$

と表される曲線が囲む領域の面積を求めよ。

以上