2020 年度 東京大学 前期二次試験 数学 解答速報

東大入試ドットコム

2020 年 2 月 26 日

理系第 1 問

(1)

$a < 0$ と仮定する。$ax^2 + bx + c = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$ であるが、右辺の第二項は x によらない定数である。これと $a < 0$ より、ある数 x_0 が存在し、$x > x_0$ ならば $ax^2 + bx + c < 0$ が成り立つ。特に $x > \max(x_0, p)$ を満たす x についても $ax^2 + bx + c < 0$ が成り立つが、これは与えられた 3 つの不等式を全て満たす実数 x の集合と、$x > p$ を満たす実数 x の集合が一致していることに反する。したがって $a < 0$ とわかる。

第二、第三の不等式で同様の議論をすることにより $b \geq 0$, $c \geq 0$ がいえるため、a, b, c はすべて 0 以上である。■

(2)

a, b, c のいずれも 0 でないと仮定する。(1) の結果より、a, b, c はすべて正となる。

まず第一の不等式について考える。$ax^2 + bx + c = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$ であるが、右辺の第二項は x によらない定数である。これと $a > 0$ より、ある数 x_1 が存在し、$x < x_1$ ならば $ax^2 + bx + c > 0$ が成り立つ。第二、第三の式についても同様の議論をすることにより、

- ある数 x_1 が存在し、$x < x_1$ ならば $ax^2 + bx + c > 0$ が成り立つ
- ある数 x_2 が存在し、$x < x_2$ ならば $bx^2 + cx + a > 0$ が成り立つ
- ある数 x_3 が存在し、$x < x_3$ ならば $cx^2 + ax + b > 0$ が成り立つ

ことがいえる。

このとき $x < \min(x_1, x_2, x_3)$ なる x は与えられた 3 つの不等式をすべて満たすが、これは与えられた 3 つの不等式を全て満たす実数 x の集合と、$x > p$ を満たす実数 x の集合が一致していることに反する。したがって「a, b, c のいずれも 0 でない」というのは誤りである。一方で a, b, c はすべて 0 以上であるため、a, b, c のうち少なくとも 1 つは 0 とわかる。■

(3)

a, b, c のうち 0 と等しいものの個数で場合分けして考える。

0 と等しいものが 1 個のとき

$a=0$ のときを考えればよい。このとき b, c は正であり、3 つの不等式は

$$\begin{cases} bx+c>0 \\ bx^2+cx>0 \\ cx^2+b>0 \end{cases}$$

となる。各々の解は

$$\begin{cases} x>-\dfrac{c}{b} \\ x<-\dfrac{c}{b} \text{ または } x>0 \\ x \text{ は任意の実数} \end{cases}$$

であるため、3 つの不等式を連立したときの解は $x>0$ である。

0 と等しいものが 2 個のとき

$a=b=0$ のときを考えればよい。このとき c は正であり、3 つの不等式は

$$\begin{cases} c>0 \\ cx>0 \\ cx^2>0 \end{cases}$$

となる。各々の解は

$$\begin{cases} x \text{ は任意の実数} \\ x>0 \\ x \text{ は } 0 \text{ 以外の実数} \end{cases}$$

であるため、3 つの不等式を連立したときの解は $x>0$ である。

0 と等しいものが 3 個のとき

すべての不等式が常に成り立たないため不適。

以上より、与えられた 3 つの不等式を全て満たす実数 x の集合と、$x>p$ を満たす実数 x の集合が一致しているのであれば、$p=0$ となることが示された。■

理系第２問

$$\frac{15}{2}$$

理系第３問

(1)

$\dfrac{y(t)}{x(t)} = 3\sqrt{\dfrac{1+t}{1-t}}$ より

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\frac{y(t)}{x(t)} &= 3 \times \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-t}{1+t}} \cdot \left(\frac{d}{dt}\frac{1-t}{1+t}\right) \\
&= \frac{3}{2}\sqrt{\frac{1-t}{1+t}} \cdot \left(-\frac{2}{(1+t)^2}\right) \\
&= -3 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-t}\sqrt{1+t}^3}
\end{aligned}$$

となるため、$-1 < t \leq 1$ において $\dfrac{d}{dt}\dfrac{y(t)}{x(t)} < 0$ が成り立つ。よって $\dfrac{y(t)}{x(t)}$ は単調に減少する。■

(2)

$$\{f(t)\}^2 = (1+t)^2\{(1+t) + 9(1-t)\} = 2(1+t)^2(5-4t)$$

より $f(t) = (1+t)\sqrt{2(5-4t)}$ となる。

$$\frac{d}{dt}f(t) = \frac{3(1-2t)}{\sqrt{\frac{5}{2} - 2t}}$$

となる。$-1 \leq t \leq 1$ という範囲にも注意すると、関数 $f(t)$ は $-1 \leq t < \dfrac{1}{2}$ で増加し、$\dfrac{1}{2} < t \leq 1$ で減少することがわかる。よって関数 $f(t)\,(-1 \leq t \leq 1)$ は $t = \dfrac{1}{2}$ で最大値 $\underline{\dfrac{3}{2}\sqrt{6}}$ をとる。

(3)

$$\frac{45}{8}\pi$$

理系第４問

(1)

$$a_{n,2} = \frac{1}{3} \cdot 4^n - 2^n + \frac{2}{3}$$

(2)

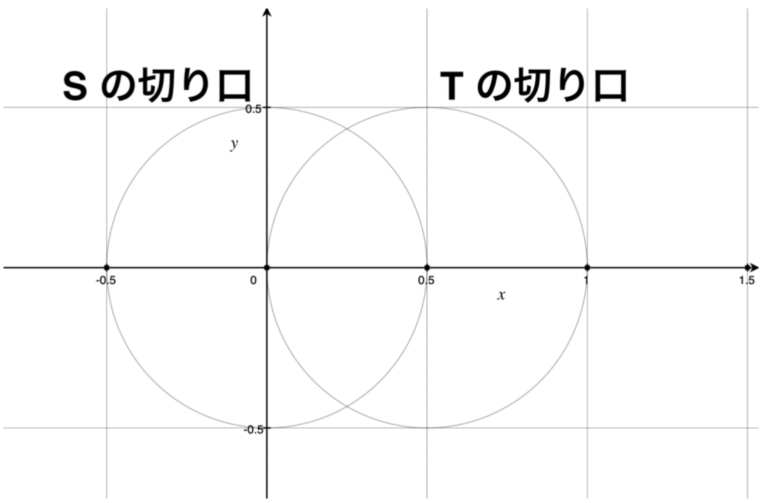
$$\begin{aligned} \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} &= 1 + 2^n x \\ \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(2x)} &= 1 + x \end{aligned}$$

(3)

$$\frac{a_{n+1,k+1}}{a_{n,k}} = \frac{2^k(2^{n+1}-1)}{2^{k+1}-1}$$

理系第５問

(1)



(2)

$$\frac{2}{3}(\pi + 1)$$

理系第６問

(1)

$p(\theta) = A\sin 2\theta - \sin(\theta+\alpha)$ とする。このとき $p(\theta)$ は連続関数であることに注意する。

$p\left(\frac{1}{4}\pi\right) = A - \sin\left(\frac{1}{4}\pi+\alpha\right) > 0\,(\because A > 1)$ が成り立つ。同様にして $p\left(\frac{3}{4}\pi\right) < 0,\ p\left(\frac{5}{4}\pi\right) > 0,\ p\left(\frac{7}{4}\pi\right) < 0$ が成り立つ。

$p\left(\frac{1}{4}\pi\right) > 0,\ p\left(\frac{3}{4}\pi\right) < 0$ よりある $\theta_1 \in \left(\frac{1}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi\right)$ が存在し $p(\theta_1) = 0$ が成り立つ。同様に区間 $\left(\frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi\right)$、$\left(\frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi\right)$、$\left(\frac{7}{4}\pi, \frac{9}{4}\pi\right)$ それぞれに $p(\theta) = 0$ となる θ が少なくとも 1 つずつ存在する。$p(\theta)$ は周期 2π であるため、区間 $\left(\frac{7}{4}\pi, \frac{9}{4}\pi\right)$ にある $p(\theta)=0$ の解のうち $0 \leq \theta < 2\pi$ を満たさないものは、適宜 2π を引き算することで $0 \leq \theta < 2\pi$ を満たすようにできる。

以上より、方程式 $p(\theta)=0$ は区間 $0 \leq \theta < 2\pi$ に少なくとも 4 個の解をもつ。■

(2)

楕円 C 上の点 $(\sqrt{2}\cos\theta, \sin\theta)$ における C の接線の方程式は $\sqrt{2}\cos\theta\cdot x + 2\sin\theta\cdot y = 1$ であるため、同じ点を通るこの接線の法線の方程式は $\sqrt{2}\sin\theta\cdot x - \cos\theta\cdot y = \sin\theta\cos\theta$ となる。ここで α を

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{2x^2+y^2}},\ \sin\alpha = -\frac{y}{\sqrt{2x^2+y^2}}$$

なる角とすると、さきの接線の方程式は

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{2}\cdot x}{\sqrt{2x^2+y^2}}\sin\theta - \frac{y}{\sqrt{2x^2+y^2}}\cos\theta &= \frac{1}{\sqrt{2x^2+y^2}}\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2\sqrt{2x^2+y^2}}\sin 2\theta \\
\sin\theta\cos\alpha + \cos\theta\sin\alpha &= \frac{1}{2\sqrt{2x^2+y^2}}\sin 2\theta \\
\frac{1}{2\sqrt{2x^2+y^2}}\sin 2\theta &- \sin(\theta+\alpha) = 0
\end{aligned}$$

と変形することができる。

ここで $\frac{1}{2\sqrt{2x^2+y^2}} > 1$ が成り立てば、上の方程式は $0 \leq \theta < 2\pi$ の範囲に少なくとも 4 つの実数解をもつ。点 P が原点であるとき、直線 PQ が原点を通るような点 Q も 4 個存在する（C と両軸の交点)。したがって $0 \leq 2x^2+y^2 < \frac{1}{4}$ であれば問題文の条件を満たすから、$r^2 \leq \frac{1}{4}$ つまり $0 < r \leq \frac{1}{2}$ なる r をとればよい。■（存在の証明は以上）

ここで、点 $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$ を通る法線を求めてみる。このとき $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}},\ \sin\alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ であるため、$\alpha = -\frac{1}{4}\pi$ である（これに $2n\pi$ の整数倍を加えたものでもよい)。このとき、さきの方程式は

$$\sin 2\theta - \sin\left(\theta + \frac{1}{4}\pi\right) = 0 \tag{1}$$

となるが、これを満たす $\theta\,(0 \leq \theta < 2\pi)$ は $\theta = \frac{1}{4}\pi,\ \frac{11}{12}\pi,\ \frac{19}{12}\pi$ の 3 つしか存在しない。したがって D は点 $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$ を含んではいけない。この点は曲線 $2x^2+y^2=\frac{1}{4}$ 上にあるため、r は高々 $\frac{1}{2}$ である。

以上より、条件を満たす r の最大値は $\underline{\frac{1}{2}}$ である。

文系第１問

$$\begin{aligned} b &= 4a^3 \\ 2^{-\frac{2}{3}} < \quad a &\leq 2^{-\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

文系第２問

(1)

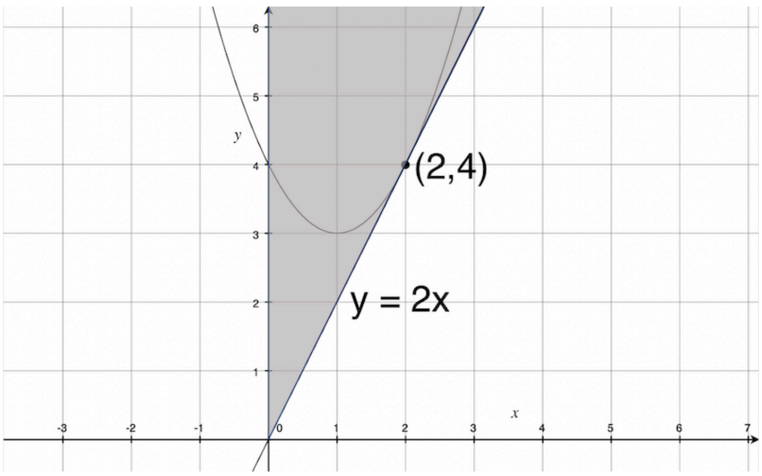
1824 通り

(2)

432 通り

文系第３問

(1)



(2)

$$\frac{-8-5\sqrt{3}}{11} \leq a \leq -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{および} \quad \frac{-8+5\sqrt{3}}{11} \leq a \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$$

文系第４問

(1)

$$a_{n,2} = \frac{1}{3} \cdot 4^n - 2^n + \frac{2}{3}$$

(2)

$$\begin{aligned} \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} &= 1 + 2^n x \\ \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(2x)} &= 1 + x \end{aligned}$$

(3)

$$\frac{a_{n+1,k+1}}{a_{n,k}} = \frac{2^k(2^{n+1} - 1)}{2^{k+1} - 1}$$

以上