1991年度 東京大学 数学（理科）

東大入試ドットコム 編

※これは東京大学により作成された，同大学教養学部前期課程各類の入試問題です。
※東大入試ドットコムは問題の作成に一切関与しておらず，また問題の権利を一切保有しません。

第 1 問

平面上に正四面体が置いてある。平面と接している面の 3 辺のひとつを任意に選び，これを軸として正四面体をたおす。n 回の操作の後に，最初に平面と接していた面が再び平面と接する確率を求めよ。

第 2 問

a, b, c を正の実数とする。xyz 空間において

$$|x| \leqq a, \quad |y| \leqq b, \quad z = c$$

をみたす点 (x, y, z) からなる板 R を考える。点光源 P が平面 $z = c + 1$ 上の楕円

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad z = c + 1$$

の上を一周するとき，光が板 R にさえぎられて xy 平面上にできる影の通過する部分の図をえがき，その面積を求めよ。

第 3 問

定数 p に対して，3 次方程式 $x^3 - 3x - p = 0$ の実数解の中で最大のものと最小のものとの積を $f(p)$ とする。ただし，実数解がただひとつのときには，その 2 乗を $f(p)$ とする。

(1) p がすべての実数を動くとき，$f(p)$ の最小値を求めよ。

(2) p の関数 $f(p)$ のグラフの概形をえがけ。

第 4 問

(1) 自然数 $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して，ある多項式 $p_n(x)$, $q_n(x)$ が存在して

$$\sin n\theta = p_n(\tan\theta)\cos^n\theta$$
$$\cos n\theta = q_n(\tan\theta)\cos^n\theta$$

と書けることを示せ。

(2) このとき，$n > 1$ ならば次の等式が成立することを証明せよ。

$$p_n'(x) = nq_{n-1}(x)$$
$$q_n'(x) = -np_{n-1}(x)$$

第 5 問

xy 平面上，x 座標，y 座標がともに整数であるような点 (m, n) を格子点とよぶ。各格子点を中心として半径 r の円がえがかれており，傾き $\dfrac{2}{5}$ の任意の直線はこれらの円のどれかと共有点をもつという。このような性質をもつ実数 r の最小値を求めよ。

第 6 問

$f(x)$ は $x > 0$ で定義された連続な関数で，$0 < x_1 < x_2$ ならば，つねに $f(x_1) > f(x_2) > 0$ であるものとし

$$S(x) = \int_x^{2x} f(t)\ dt$$

とおく。このとき，$S(1) = 1$ であり，さらに任意の $a > 0$ に対して，原点と点 $(a,\ f(a))$，原点と点 $(2a,\ f(2a))$ を結ぶ 2 直線と曲線 $y = f(x)$ とで囲まれる部分の面積は $3S(a)$ に等しいものとする。

(1) $S(x)$, $f(x) - 2f(2x)$ をそれぞれ x の関数として表せ。

(2) $x > 0$ に対して，$a(x) = \lim_{n\to\infty} 2^n f(2^n x)$ とおく。積分

$$\int_x^{2x} a(t)dt$$

の値を求めよ。

(3) 関数 $f(x)$ を決定せよ。

以上