1992年度 東京大学 数学（理科）

東大入試ドットコム 編

※これは東京大学により作成された，同大学教養学部前期課程各類の入試問題です。
※東大入試ドットコムは問題の作成に一切関与しておらず，また問題の権利を一切保有しません。

第 1 問

a は 1 より大きい定数とし，xy 平面上の点 $(a, 0)$ を A，点 $(a, \log a)$ を B，曲線 $y = \log x$ と x 軸の交点を C とする。さらに x 軸，線分 BA および曲線 $y = \log x$ で囲まれた部分の面積を S_1 とする。

(1) $1 \leqq b \leqq a$ となる b に対し点 $(b, \log b)$ を D とする。四辺形 ABDC の面積が S_1 にもっとも近くなるような b の値と，そのときの四辺形 ABDC の面積 S_2 を求めよ。

(2) $a \to \infty$ のときの $\dfrac{S_2}{S_1}$ の極限値を求めよ。

第 2 問

xy 平面において，x 座標，y 座標ともに整数であるような点を格子点と呼ぶ。格子点を頂点に持つ三角形 ABC を考える。

(1) 辺 AB，AC それぞれの上に両端を除いて奇数個の格子点があるとすると，辺 BC 上にも両端を除いて奇数個の格子点があることを示せ。

(2) 辺 AB，AC 上に両端を除いて丁度 3 点ずつ格子点が存在するとすると，三角形 ABC の面積は 8 で割り切れる整数であることを示せ。

第 3 問

a, b を正の実数とする。座標空間の 4 点 P(0, 0, 0), Q(a, 0, 0), R(0, 1, 0), S(0, 1, b) が半径 1 の同一球面上にあるとき，P, Q, R, S を頂点とする四面体に内接する球の半径を r とすれば，次の二つの不等式が成り立つことを示せ。

$$\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2 \geqq \frac{20}{3} \qquad \frac{1}{r} \geqq 2\sqrt{\frac{2}{3}}+2\sqrt{\frac{5}{3}}$$

第 4 問

xyz 空間において，x 軸と平行な柱面

$$A = \{(x,\, y,\, z) \,|\, y^2 + z^2 = 1,\, x,\, y,\, z \text{ は実数 }\}$$

から，y 軸と平行な柱面

$$B = \{(x,\, y,\, z) \,|\, x^2 - \sqrt{3}xz + z^2 = \frac{1}{4},\, x,\, y,\, z \text{ は実数 }\}$$

により囲まれる部分を切り抜いた残りの図形を C とする。

図形 C の展開図をえがけ。ただし点 $(0,\, 1,\, 0)$ を通り x 軸と平行な直線に沿って C を切り開くものとする。

第 5 問

xy 平面において，曲線 $y = \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{1}{2x}$ 上の点 $\left(1, \dfrac{2}{3}\right)$ を出発し，この曲線上を進む点 P がある。出発してから t 秒後の P の速度 $\vec{v}$ の大きさは $\dfrac{t}{2}$ に等しく，$\vec{v}$ の x 成分はつねに正または 0 であるとする。

(1) 出発してから t 秒後の P の位置を (x, y) として，x と t の間の関係式を求めよ。

(2) $\vec{v}$ がベクトル $(8, 15)$ と平行になるのは出発してから何秒後か。

第 6 問

A, B の二人がじゃんけんをして，グーで勝てば 3 歩，チョキで勝てば 5 歩，パーで勝てば 6 歩進む遊びをしている。1 回のじゃんけんで A の進む歩数から B の進む歩数を引いた値の期待値を E とする。

(1) B がグー，チョキ，パーを出す確率がすべて等しいとする。A がどのような確率でグー，チョキ，パーを出すとき，E の値は最大となるか。

(2) B がグー，チョキ，パーを出す確率の比が $a : b : c$ であるとする。A がどのような確率でグー，チョキ，パーを出すならば，任意の a, b, c に対し $E \geqq 0$ となるか。

以上