1993年度 東京大学 数学（理科）

東大入試ドットコム 編

※これは東京大学により作成された，同大学教養学部前期課程各類の入試問題です。
※東大入試ドットコムは問題の作成に一切関与しておらず，また問題の権利を一切保有しません。

第 1 問

すべての面が合同な四面体 ABCD がある。頂点 A, B, C はそれぞれ x, y, z 軸上の正の部分にあり，辺の長さは

$$\mathrm{AB} = 2l - 1, \quad \mathrm{BC} = 2l, \quad \mathrm{CA} = 2l + 1 \quad (l > 2)$$

である。　正四面体 ABCD の体積を $V(l)$ とするとき，次の極限値を求めよ。

$$\lim_{l \to 2} \frac{V(l)}{\sqrt{l-2}}$$

第 2 問

整数からなる数列 $\{a_n\}$ を漸化式

$$\begin{cases} a_1 = 1,\ a_2 = 3 \\ a_{n+2} = 3a_{n+1} - 7a_n \quad (n = 1,\ 2,\ \cdots) \end{cases}$$

によって定める。

(1) a_n が偶数となることと，n が 3 の倍数となることは同値であることを示せ。

(2) a_n が 10 の倍数となるための条件を (1) と同様の形式で求めよ。

第 3 問

xy 平面内に次の二つの集合 l, m を考える。

$$l = \{(-5,\, y) | -5 < y < 5\}$$
$$m = \{(5,\, y) | -5 < y < 5\}$$

l, m 上にない 2 点 A, B に対し，A, B を l, m と交わらない線分又は折れ線で結ぶときの経路の長さの最小値を d(A, B) で表す。

2 点 P(-9, -3), Q(9, 3) に対し

$$d(\mathrm{P}, \mathrm{R}) = d(\mathrm{Q}, \mathrm{R})$$

となる点 R の軌跡を xy 平面上に図示せよ。

第 4 問

n を 2 以上の自然数とし，

$$f(x) = x^n + px + q \quad (p,\, q \text{ は実数})$$

の形の n 次関数について積分

$$I = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)^2 dx$$

を考える。I を最小にするような $(p,\, q)$ が唯一組存在することを示し，そのような $(p,\, q)$ と I の最小値を求めよ。

第 5 問

1 と 0 を 5 個ならべた列 10110 をある人が繰り返し書き写すとする。ただしこの列を S で表し，これの第 1 回の写しを S_1 で表すとき，第 2 回目に書き写すときは S_1 を書き写す。S_1 の写しを S_2 とするとき，第 3 回目には S_2 を書き写す。以下同様に続ける。

この人が 0 を 1 に写しまちがえる確率は $p\,(0 < p < 1)$ であり，1 を 0 に写しまちがえる確率は $q\,(0 < q < 1)$ であるが，それ以外の写しまちがいはないものとする。第 n 回目の写し S_n が S に一致する確率を $C(n)$ とするとき，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} C(n)$ を求めよ。

第 6 問

時刻 t における座標が

$$x = 2\cos t + \cos 2t,\ y = \sin 2t$$

で表される xy 平面上の点 P の運動を考える。

(1) P の速さ，すなわち速度ベクトル $\left(\dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}\right)$ の大きさ，の最大値と最小値を求めよ。

(2) t が $0 \leqq t < 2\pi$ の範囲を動く間に P が 2 回以上通過する点が唯一つ存在することを示し，その点を通過する各々の時刻での速度ベクトルを求め図示せよ。

以上