1994年度 東京大学 数学（文科）

東大入試ドットコム 編

※これは東京大学により作成された，同大学教養学部前期課程各類の入試問題です。
※東大入試ドットコムは問題の作成に一切関与しておらず，また問題の権利を一切保有しません。

第 1 問

xy 平面上で，次の条件をみたす点 $(x,\, y)$ の範囲を D とする。

$$\log_2 x \leqq 2 + \log_2 y \leqq \log_2 x + \log_2(4 - 2x)$$

(1) D を xy 平面上に図示せよ。

(2) $s < 1$ のとき，$y - sx$ の D 上での最大値 $f(s)$ を求め，関数 $t = f(s)$ のグラフを st 平面上に図示せよ。

第 2 問

xy 平面上の 2 点 P，Q に対し，P と Q を x 軸または y 軸に平行な線分からなる折れ線で結ぶときの経路の長さの最小値を d(P, Q) で表す。

(1) 原点 O(0, 0) と点 A(1, 3) に対し，d(O, P) = d(P, A) をみたす点 P(x, y) の範囲を xy 平面上に図示せよ。

(2) 点 A(1, 3) と点 B(-1, 1) に対し，d(A, P) = d(P, B) をみたす点 P(x, y) の範囲を xy 平面上に図示せよ。

第 3 問

$0 < a \leqq 1$ に対し，行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1+2a \end{pmatrix}$ を考える。

$\vec{u} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$ のとき，ベクトル $A\vec{u}$ の長さ $|A\vec{u}|$ について，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$(2-\sqrt{2})\ a \leqq |A\vec{u}| \leqq 2+\sqrt{2}$$

ただし $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ とする。

第 4 問

$0 < c < 1$ とする。3 次関数 $f(x) = -4x^3 + 3x^2$ に対し，

$$f_1(x) = f(x) + \int_0^c f(t)dt, \quad f_2(x) = f(x) + \int_0^c f_1(t)dt$$

とおく。以下，関数 $f_3(x), f_4(x), \cdots$ を順次

$$f_n(x) = f(x) + \int_0^c f_{n-1}(t)dt \qquad (n = 3, 4, \cdots)$$

に定める。

(1) 関数 $f_n(x)$ を求めよ。

(2) $f_n(x)$ について，$0 < x < 1$ のとき，$f_n(x) = 0$ をみたす x がただひとつ存在することを示せ。

以上