1995年度 東京大学 数学(文科)

東大入試ドットコム 編

※これは東京大学により作成された、同大学教養学部前期課程各類の入試問題です。 ※東大入試ドットコムは問題の作成に一切関与しておらず、また問題の権利を一切保有しません。

第1問

すべての正の実数 x,y に対し

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} \le k\sqrt{2x + y}$$

が成り立つような実数 k の最小値を求めよ。

第2問

自然数 k に対し、xy 平面上のベクトル

$$\vec{v}_k = (\cos k \times 45^\circ, \sin k \times 45^\circ)$$

を考える。a, b を正の数とし、平面上の点 P_0, P_1, \cdots, P_8 を

$$P_{0} = (0, 0) \xrightarrow{\overrightarrow{P_{2n}P_{2n+1}}} = a\vec{v}_{2n+1}, \qquad n = 0, 1, 2, 3$$

$$\xrightarrow{\overrightarrow{P_{2n+1}P_{2n+2}}} = b\vec{v}_{2n+2}, \qquad n = 0, 1, 2, 3$$

により定める。このとき以下の問に答えよ。

- (1) $P_8 = P_0$ であることを示せ。
- (2) P_0, P_1, \cdots, P_8 を順に結んで得られる 8 角形の面積 S を a, b を用いて表せ。
- (3) 面積 S が 7, 線分 P_0P_4 の長さが $\sqrt{10}$ のとき, a,b の値を求めよ。

第3問

xy 平面において、曲線 $y=-x^3+ax$ 上の x>0 の部分に、点 P を次の条件をみたすようにとる。ただし a>0 とする。

点 P におけるこの曲線の接線と y 軸との交点を Q とするとき,原点 O における接線が $\angle Q$ OP を二等分する。

このとき、 $\triangle \mathrm{QOP}$ の面積 S(a) の最小値と、それを与える a の値を求めよ。

第4問

半径 1 cm の半球形の器が水平から角 θ だけ傾けて固定されている。ただし, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ とする。この器に毎秒 $\frac{\pi}{18}\,\mathrm{cm}^3$ の割合で水を入れるとき,入れはじめてから $3+\cos^2\theta$ 秒後に器から水が流れだした。このときの θ の値を求めよ。

以上