1997年度 東京大学 数学（理科）

東大入試ドットコム 編

※これは東京大学により作成された，同大学教養学部前期課程各類の入試問題です。
※東大入試ドットコムは問題の作成に一切関与しておらず，また問題の権利を一切保有しません。

第 1 問

a, b を正の数とし，xy 平面の 2 点 A$(a,\,0)$ および B$(0,\,b)$ を頂点とする正 3 角形を ABC とする。ただし，C は第 1 象限の点とする。

(1) 3 角形 ABC が正方形 $D=\{(x,\,y)|\,0\leqq x\leqq 1,\,0\leqq y\leqq 1\}$ に含まれるような $(a,\,b)$ の範囲を求めよ。

(2) $(a,\,b)$ が (1) の範囲を動くとき，3 角形 ABC の面積 S が最大となるような $(a,\,b)$ を求めよ。また，そのときの S の値を求めよ。

第 2 問

n を正の整数，a を実数とする。すべての整数 m に対して

$$m^2 - (a-1)m + \frac{n^2}{2n+1}\,a > 0$$

が成り立つような a の範囲を n を用いて表せ。

第 3 問

r は $0 < r < 1$ をみたす実数とする。xyz 空間に原点 O(0, 0, 0) と 2 点 A(1, 0, 0), B(0, 1, 0) をとる。

(1) xyz 空間の点 P で条件

$$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}| = |\overrightarrow{\mathrm{PB}}| = r|\overrightarrow{\mathrm{PO}}|$$

をみたすものが存在するような r の範囲を求めよ。

(2) 点 P が (1) の条件をみたして動くとき，内積 $\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PB}}$ の最大値，最小値を r の関数と考えてそれぞれ $M(r)$, $m(r)$ で表す。このとき，左からの極限 $\displaystyle\lim_{r \to 1-0} (1-r)^2 \{M(r) - m(r)\}$ を求めよ。

第 4 問

正 3 角形 ABC の頂点 A から辺 AB とのなす角が θ の方向に，3 角形の内部に向かって出発した光線を考える。ただし $0^\circ < \theta < 60^\circ$ とする。この光線は 3 角形の各辺で入射角と反射角が等しくなるように反射し，頂点に到達するとそこでとまるものとする。また，3 角形の内部では光線は直進するものとする。

(1) $\tan\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$ のとき，この光線はどの頂点に到達するかを述べよ。

(2) 正の整数 k を用いて $\tan\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{6k+2}$ と表せるとき，この光線の到達する頂点を求め，またそこへ至るまでの反射の回数を k を用いて表せ。

第 5 問

a を $0 < a < \dfrac{1}{4}$ をみたす実数とする。xy 平面で，不等式

$$y^2 \leqq x^2(1-x^2) - a$$

の表す領域を y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ。

第 6 問

a を実数とする。

(1) 曲線 $y = \dfrac{8}{27}x^3$ と放物線 $y = (x+a)^2$ の両方に接する直線が x 軸以外に 2 本あるような a の範囲を求めよ。

(2) a が (1) の範囲にあるとき，この 2 本の接線と放物線 $y = (x+a)^2$ で囲まれた部分の面積 S を a を用いて表せ。

以上