1998年度 東京大学 数学（理科）

東大入試ドットコム 編

※これは東京大学により作成された，同大学教養学部前期課程各類の入試問題です。
※東大入試ドットコムは問題の作成に一切関与しておらず，また問題の権利を一切保有しません。

第 1 問

a は 0 でない実数とする。関数

$$f(x) = (3x^2 - 4)\left(x - a + \frac{1}{a}\right)$$

の極大値と極小値の差が最小となる a の値を求めよ。

第 2 問

n を正の整数とする。連立不等式

$$\begin{cases} x+y+z \leqq n \\ -x+y-z \leqq n \\ x-y-z \leqq n \\ -x-y+z \leqq n \end{cases}$$

をみたす xyz 空間の点 $\mathrm{P}(x,\, y,\, z)$ で，$x,\, y,\, z$ がすべて整数であるものの個数を $f(n)$ とおく。

極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{n^3}$ を求めよ。

第 3 問

xy 平面に 2 つの円

$$C_0 : x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}, \quad C_1 : (x-1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

をとり，C_2 を x 軸と C_0, C_1 に接する円とする。さらに，$n = 2, 3, \cdots$ に対して C_{n+1} を x 軸と C_{n-1}, C_n に接する円で C_{n-2} とは異なるものとする。C_n の半径を r_n, C_n と x 軸の接点を $(x_n, 0)$ として

$$q_n = \frac{1}{\sqrt{2r_n}}, \quad p_n = q_n x_n$$

とおく。

(1) q_n は整数であることを示せ。

(2) p_n も整数で，p_n と q_n は互いに素であることを示せ。

(3) α を $\alpha = \dfrac{1}{1+\alpha}$ をみたす正の数として，不等式

$$|x_{n+1} - \alpha| < \frac{2}{3}|x_n - \alpha|$$

を示し，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n$ を求めよ。

第 4 問

実数 a に対して $k \leqq a < k+1$ をみたす整数 k を $[a]$ で表す。n を正の整数として

$$f(x) = \frac{x^2(2 \cdot 3^3 \cdot n - x)}{2^5 \cdot 3^3 \cdot n^2}$$

とおく。$36n+1$ 個の整数 $[f(0)], [f(1)], [f(2)], \cdots, [f(36n)]$ のうち相異なるものの個数を n を用いて表せ。

第 5 問

θ は $0 \leqq \theta < 2\pi$ をみたす実数とする。xy 平面にベクトル

$$\vec{a} = (\cos\theta, \sin\theta), \quad \vec{b} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

をとり，点 P_n, Q_n, $n = 1, 2, \cdots$ を

$$\begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{OP}}_1 = (1, 0) \\ \overrightarrow{\mathrm{OQ}}_n = \overrightarrow{\mathrm{OP}}_n - (\vec{a} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}}_n)\vec{a} \\ \overrightarrow{\mathrm{OP}}_{n+1} = 4\{\overrightarrow{\mathrm{OQ}}_n - (\vec{b} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OQ}}_n)\vec{b}\} \end{cases}$$

で定める。ただし，O は原点で，$\vec{a} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}}_n$ および $\vec{b} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OQ}}_n$ はベクトルの内積を表す。$\overrightarrow{\mathrm{OP}}_n = (x_n, y_n)$ とおく。数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ がともに収束する θ の範囲を求めよ。さらに，このような θ に対して，極限値 $\lim_{n\to\infty} x_n$, $\lim_{n\to\infty} y_n$ を求めよ。

第 6 問

xyz 空間に 5 点 A(1, 1, 0), B(-1, 1, 0), C(-1, -1, 0), D(1, -1, 0), P(0, 0, 3) をとる。四角錐 PABCD の

$$x^2 + y^2 \geqq 1$$

をみたす部分の体積を求めよ。

以上