1999年度 東京大学 数学（理科）

東大入試ドットコム 編

※これは東京大学により作成された，同大学教養学部前期課程各類の入試問題です。
※東大入試ドットコムは問題の作成に一切関与しておらず，また問題の権利を一切保有しません。

第 1 問

(1) 一般角 θ に対して，$\sin\theta$, $\cos\theta$ の定義を述べよ。

(2) (1) で述べた定義にもとづき，一般角 α, β に対して

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

を証明せよ。

第 2 問

複素数 $z_n\,(n=1,\,2,\,\cdots)$ を

$$z_1=1,\ z_{n+1}=(3+4i)z_n+1$$

によって定める。ただし i は虚数単位である。

(1) すべての自然数 n について

$$\frac{3\times 5^{n-1}}{4}<|z_n|<\frac{5^n}{4}$$

が成り立つことを示せ。

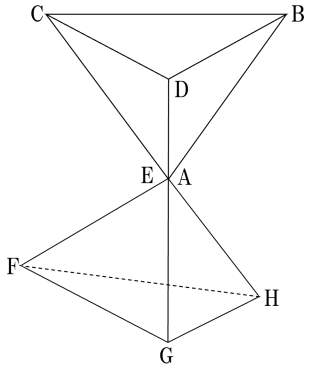
(2) 実数 $r>0$ に対して，$|z_n|\leqq r$ を満たす z_n の個数を $f(r)$ とおく。このとき，$\displaystyle\lim_{r\to\infty}\frac{f(r)}{\log r}$ を求めよ。

第 3 問

p を $0 < p < 1$ を満たす実数とする。

(1) 四面体 ABCD の各辺はそれぞれ確率 p で電流を通すものとする。このとき，頂点 A から B に電流が流れる確率を求めよ。ただし，各辺が電流を通すか通さないかは独立で，辺以外は電流を通さないものとする。

(2) (1) で考えたような 2 つの四面体 ABCD と EFGH を図のように頂点 A と E でつないだとき，頂点 B から F に電流が流れる確率を求めよ。



第 4 問

xyz 空間において xy 平面上に円板 A があり xz 平面上に円板 B があって以下の 2 条件を満たしているものとする。

(a) A, B は原点からの距離が 1 以下の領域に含まれる。

(b) A, B は一点 P のみを共有し，P はそれぞれの円周上にある。

このような円板 A と B の半径の和の最大値を求めよ。ただし，円板とは円の内部と円周をあわせたものを意味する。

第 5 問

(1) k を自然数とする。m を $m = 2^k$ とおくとき，$0 < n < m$ をみたすすべての整数 n について，二項係数 ${}_m\mathrm{C}_n$ は偶数であることを示せ。

(2) 以下の条件をみたす自然数 m をすべて求めよ。
条件：$0 \leqq n \leqq m$ をみたすすべての整数 n について二項係数 ${}_m\mathrm{C}_n$ は奇数である。

第 6 問

$\displaystyle\int_0^{\pi} e^x \sin^2 x dx > 8$ であることを示せ。
ただし，$\pi = 3.14\cdots$ は円周率，$e = 2.71\cdots$ は自然対数の底である。

以上