2000年度 東京大学 数学（理科）

東大入試ドットコム 編

※これは東京大学により作成された，同大学教養学部前期課程各類の入試問題です。
※東大入試ドットコムは問題の作成に一切関与しておらず，また問題の権利を一切保有しません。

第 1 問

AB = AC，BC = 2 の直角二等辺三角形 ABC の各辺に接し，ひとつの軸が辺 BC に平行な楕円の面積の最大値を求めよ。

第 2 問

複素数平面上の原点以外の相異なる 2 点 $\mathrm{P}(\alpha)$, $\mathrm{Q}(\beta)$ を考える。$\mathrm{P}(\alpha)$, $\mathrm{Q}(\beta)$ を通る直線を l，原点から l に引いた垂線と l の交点を $\mathrm{R}(w)$ とする。ただし，複素数 γ が表す点 C を $\mathrm{C}(\gamma)$ とかく。このとき,「$w = \alpha\beta$ であるための必要十分条件は，$\mathrm{P}(\alpha)$，$\mathrm{Q}(\beta)$ が中心 $\mathrm{A}\left(\dfrac{1}{2}\right)$，半径 $\dfrac{1}{2}$ の円周上にあることである。」を示せ。

第 3 問

$a>0$ とする。正の整数 n に対して，区間 $0 \leqq x \leqq a$ を n 等分する点の集合 $\left\{0, \dfrac{a}{n}, \cdots, \dfrac{n-1}{n}a,\, a\right\}$ の上で定義された関数 $f_n(x)$ があり，次の方程式を満たす。

$$\begin{cases} f_n(0)=c, \\ \dfrac{f_n((k+1)h)-f_n(kh)}{h}=\{1-f_n(kh)\}f_n((k+1)h) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (k=0,\,1,\,\cdots,\,n-1) \end{cases}$$

ただし，$h=\dfrac{a}{n}$, $c>0$ である。

このとき，以下の問いに答えよ。

(1) $p_k=\dfrac{1}{f_n(kh)}\,(k=0,\,1,\,\cdots,\,n)$ とおいて p_k を求めよ。

(2) $g(a)=\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(a)$ とおく。$g(a)$ を求めよ。

(3) $c=2,\,1,\,\dfrac{1}{4}$ それぞれの場合について，$y=g(x)$ の $x>0$ でのグラフをかけ。

第 4 問

座標平面上を運動する 3 点 P, Q, R があり，時刻 t における座標が次で与えられている。

$$\mathrm{P} : x = \cos t,\ y = \sin t$$
$$\mathrm{Q} : x = 1 - vt,\ y = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\mathrm{R} : x = 1 - vt,\ y = 1$$

ただし，v は正の定数である。この運動において，以下のそれぞれの場合に v のとりうる値の範囲を求めよ。

(1) 点 P と線分 QR が時刻 0 から 2π までの間ではぶつからない。

(2) 点 P と線分 QR がただ一度だけぶつかる。

第 5 問

次の条件を満たす正の整数全体の集合を S とおく。

「各けたの数字はたがいに異なり，どの 2 つのけたの数字の和も 9 にならない。」

ただし，S の要素は 10 進法で表す。また，1 けたの正の整数は S に含まれるとする。

このとき次の問いに答えよ。

(1) S の要素でちょうど 4 けたのものは何個あるか。

(2) 小さい方から数えて 2000 番目の S の要素を求めよ。

第 6 問

(1) a, b, c を正の実数とするとき，

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & c & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & y & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

をみたす実数 x, y, z を a, b, c で表せ。

(2) a, b, c が $1 \leqq a \leqq 2$,　$1 \leqq b \leqq 2$,　$1 \leqq c \leqq 2$ の範囲を動くとき，(1) の x, y, z を座標とする点 (x, y, z) が描く立体を K とする。立体 K を平面 $y = t$ で切った切り口の面積を求めよ。

(3) この立体 K の体積を求めよ。

以上