2001年度 東京大学 数学（理科）

東大入試ドットコム 編

※これは東京大学により作成された，同大学教養学部前期課程各類の入試問題です。
※東大入試ドットコムは問題の作成に一切関与しておらず，また問題の権利を一切保有しません。

第 1 問

半径 r の球面上に 4 点 A, B, C, D がある。四面体 ABCD の各辺の長さは，AB $= \sqrt{3}$, AC $=$ AD $=$ BC $=$ BD $=$ CD $= 2$ を満たしている。このとき r の値を求めよ。

第 2 問

次の等式を満たす関数 $f(x)\,(0 \leqq x \leqq 2\pi)$ がただ一つ定まるための実数 a, b の条件を求めよ。また，そのときの $f(x)$ を決定せよ。

$$f(x) = \frac{a}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin(x+y)f(y)\ dy + \frac{b}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(x-y)f(y)\ dy + \sin x + \cos x$$

ただし，$f(x)$ は空間 $0 \leqq x \leqq 2\pi$ で連続な関数とする。

第 3 問

実数 $t > 1$ に対し，xy 平面上の点 O(0, 0), P(1, 1), $\mathrm{Q}\left(t, \dfrac{1}{t}\right)$ を頂点とする三角形の面積を $a(t)$ とし，線分 OP, OQ と双曲線 $xy = 1$ とで囲まれた部分の面積を $b(t)$ とする。このとき

$$c(t) = \frac{b(t)}{a(t)}$$

とおくと，関数 $c(t)$ は $t > 1$ においてつねに減少することを示せ。

第 4 問

複素数平面上の点 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ を

$$\begin{cases} a_1 = 1,\ a_2 = i, \\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad (n = 1, 2, \cdots) \end{cases}$$

により定め

$$b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

とおく。ただし，i は虚数単位である。

(1) 3 点 b_1, b_2, b_3 を通る円 C の中心と半径を求めよ。

(2) すべての点 $b_n (n = 1, 2, \cdots)$ は円 C の周上にあることを示せ。

第 5 問

容量 1 リットルの m 個のビーカー（ガラス容器）に水が入っている。$m \geqq 4$ で空のビーカーは無い。入っている水の総量は 1 リットルである。また x リットルの水が入っているビーカーがただ一つあり，その他のビーカーには x リットル未満の水しか入っていない。このとき，水の入っているビーカーが 2 個になるまで，次の (a) から (c) までの操作を，順に繰り返し行う。

(a) 入っている水の量が最も少ないビーカーを一つ選ぶ。

(b) さらに，残りのビーカーの中から，入っている水の量が最も少ないものを一つ選ぶ。

(c) 次に，(a) で選んだビーカーの水を (b) で選んだビーカーにすべて移し，空になったビーカーを取り除く。

この操作の過程で，入っている水の量が最も少ないビーカーの選び方が一通りに決まらないときは，そのうちのいずれも選ばれる可能性があるものとする。

(1) $x < \dfrac{1}{3}$ のとき，最初に x リットルの水の入っていたビーカーは，操作の途中で空になって取り除かれるか，または最後まで残って水の量が増えていることを証明せよ。

(2) $x > \dfrac{2}{5}$ のとき，最初に x リットルの水の入っていたビーカーは，最後まで x リットルの水が入ったままで残ることを証明せよ。

第 6 問

コインを投げる試行の結果によって，数直線上にある 2 点 A，B を次のように動かす。

表が出た場合：点 A の座標が点 B の座標より大きいときは，A と B を共に正の方向に 1 動かす。
そうでないときは， A のみ正の方向に 1 動かす。

裏が出た場合：点 B の座標が点 A の座標より大きいときは， A と B を共に正の方向に 1 動かす。
そうでないときは， B のみ正の方向に 1 動かす。

最初 2 点 A，B は原点にあるものとし，上記の試行を n 回繰り返して A と B を動かしていった結果，A, B の到達した点の座標をそれぞれ a, b とする。

(1) n 回コインを投げたときの表裏の出方の場合の数 2^n 通りのうち，$a = b$ となる場合の数を X_n とおく。X_{n+1} と X_n の間の関係式を求めよ。

(2) X_n を求めよ。

(3) n 回コインを投げたときの表裏の出方の場合の数 2^n 通りについての a の値の平均を求めよ。

以上