2003年度 東京大学 数学（文科）

東大入試ドットコム 編

※これは東京大学により作成された，同大学教養学部前期課程各類の入試問題です。
※東大入試ドットコムは問題の作成に一切関与しておらず，また問題の権利を一切保有しません。

第 1 問

a, b, c を実数とし，$a \neq 0$ とする。2 次関数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ が次の条件 (A)，(B) を満たすとする。

(A) $$f(-1) = -1, \quad f(1) = 1, \quad f'(1) \leqq 6$$

(B) $-1 \leqq x \leqq 1$ を満たすすべての x に対し，$f(x) \leqq 3x^2 - 1$

このとき，積分 $I = \displaystyle\int_{-1}^{1} (f'(x))^2 dx$ のとりうる範囲を求めよ。

第 2 問

a, b を実数とする。次の 4 つの不等式を同時に満たす点 (x, y) 全体からなる領域を D とする。

$$\begin{aligned} x + 3y &\geqq a \\ 3x + y &\geqq b \\ x &\geqq 0 \\ y &\geqq 0 \end{aligned}$$

領域 D における $x + y$ の最小値を求めよ。

第 3 問

2 次方程式 $x^2-4x+1=0$ の 2 つの実数解のうち大きいものを α，小さいものを β とする。$n=1, 2, 3, \cdots$ に対し

$$s_n=\alpha^n+\beta^n$$

とおく。

(1) s_1, s_2, s_3 を求めよ。また，$n \geqq 3$ に対し，s_n を s_{n-1} と s_{n-2} で表せ。

(2) s_n は正の整数であることを示し，s_{2003} の 1 の位の数を求めよ。

(3) α^{2003} 以下の最大の整数の 1 の位の数を求めよ。

第 4 問

さいころを振り，出た目の数で 17 を割った余りを X_1 とする。ただし，1 で割った余りは 0 である。

さらにさいころを振り，出た目の数で X_1 を割った余りを X_2 とする。以下同様にして，X_n が決まればさいころを振り，出た目の数で X_n を割った余りを X_{n+1} とする。

このようにして，X_n, $n = 1, 2, \cdots$ を定める。

(1) $X_3 = 0$ となる確率を求めよ。

(2) 各 n に対し，$X_n = 5$ となる確率を求めよ。

(3) 各 n に対し，$X_n = 1$ となる確率を求めよ。

注意：さいころは 1 から 6 までの目が等確率で出るものとする。

以上