2005年度 東京大学 数学(文科)

東大入試ドットコム 編

※これは東京大学により作成された、同大学教養学部前期課程各類の入試問題です。 ※東大入試ドットコムは問題の作成に一切関与しておらず、また問題の権利を一切保有しません。

第1問

f(x) を f(0)=0 をみたす 2 次関数とする。a,b を実数として、関数 g(x) を次で与える。

$$g(x) = \begin{cases} ax & (x \le 0) \\ bx & (x > 0) \end{cases}$$

a, b を色々変化させ

$$\int_{-1}^{0} \{f'(x) - g'(x)\}^2 dx + \int_{0}^{1} \{f'(x) - g'(x)\}^2 dx$$

が最小になるようにする。このとき,

$$g(-1) = f(-1), \quad g(1) = f(1)$$

であることを示せ。

第2問

3 以上 9999 以下の奇数 a で, a^2-a が 10000 で割り切れるものをすべて求めよ。

第3問

0 以上の実数 s,t が $s^2+t^2=1$ をみたしながら動くとき,方程式

$$x^4 - 2(s+t)x^2 + (s-t)^2 = 0$$

の解のとる値の範囲を求めよ。

第4問

N を 1 以上の整数とする。数字 1, 2, \cdots , N が書かれたカードを 1 枚ずつ,計 N 枚用意し,甲,乙のふたりが次の手順でゲームを行う。

- (i) 甲が1枚カードをひく。そのカードに書かれた数をaとする。ひいたカードはもとに戻す。
- (ii) 甲はもう 1 回カードをひくかどうかを選択する。ひいた場合は、そのカードに書かれた数を b とする。ひいたカードはもとに戻す。ひかなかった場合は、b=0 とする。a+b>N の場合は乙の勝ちとし、ゲームは終了する。
- (iii) $a+b \leq N$ の場合は、乙が 1 枚カードをひく。そのカードに書かれた数を c とする。ひいたカードはもとに戻す。 a+b < c の場合は乙の勝ちとし、ゲームは終了する。
- (iv) $a+b \ge c$ の場合は、乙はもう 1 回カードをひく。そのカードに書かれた数を d とする。 $a+b < c+d \le N$ の場合は乙の勝ちとし、それ以外の場合は甲の勝ちとする。
- (ii) の段階で、甲にとってどちらの選択が有利であるかを、aの値に応じて考える。以下の問いに答えよ。
- (1) 甲が2回目にカードをひかないことにしたとき、甲の勝つ確率をaを用いて表せ。
- (2) 甲が 2 回目にカードをひくことにしたとき,甲の勝つ確率を a を用いて表せ。ただし,各カードがひかれる確率 は等しいものとする。

以上