2009年度 東京大学 数学（理科）

東大入試ドットコム 編

※これは東京大学により作成された，同大学教養学部前期課程各類の入試問題です。
※東大入試ドットコムは問題の作成に一切関与しておらず，また問題の権利を一切保有しません。

第 1 問

自然数 $m \geqq 2$ に対し，$m-1$ 個の二項係数

$$ {}_m\mathrm{C}_1,\ {}_m\mathrm{C}_2,\ \cdots,\ {}_m\mathrm{C}_{m-1} $$

を考え，これらすべての最大公約数を d_m とする。すなわち d_m はこれらすべてを割り切る最大の自然数である。

(1) m が素数ならば，$d_m = m$ であることを示せ。

(2) すべての自然数 k に対し，$k^m - k$ が d_m で割り切れることを，k に関する数学的帰納法によって示せ。

(3) m が偶数のとき d_m は 1 または 2 であることを示せ。

第 2 問

実数を成分にもつ行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ と実数 r, s が下の条件 (i), (ii), (iii) をみたすとする。

(i) $s > 1$

(ii) $A \begin{pmatrix} r \\ 1 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} r \\ 1 \end{pmatrix}$

(iii) $A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \quad (n = 1, 2, \cdots)$ とするとき，

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \lim_{n \to \infty} y_n = 0$$

このとき以下の問に答えよ。

(1) $B = \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} A \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を a, c, r, s を用いて表せ。

(2) $B^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_n \\ w_n \end{pmatrix} \quad (n = 1, 2, \cdots)$ とするとき，$\lim_{n \to \infty} z_n = \lim_{n \to \infty} w_n = 0$ を示せ。

(3) $c = 0$ かつ $|a| < 1$ を示せ。

第 3 問

スイッチを 1 回押すごとに，赤，青，黄，白のいずれかの色の玉が 1 個，等確率 $\frac{1}{4}$ で出てくる機械がある。2 つの箱 L と R を用意する。次の 3 種類の操作を考える。

（A）1 回スイッチを押し，出てきた玉を L に入れる。

（B）1 回スイッチを押し，出てきた玉を R に入れる。

（C）1 回スイッチを押し，出てきた玉と同じ色の玉が，L になければその玉を L に入れ，L にあればその玉を R に入れる。

(1) L と R は空であるとする。操作（A）を 5 回おこない，さらに操作（B）を 5 回おこなう。このとき L にも R にも 4 色すべての玉が入っている確率 P_1 を求めよ。

(2) L と R は空であるとする。操作（C）を 5 回おこなう。このとき L に 4 色すべての玉が入っている確率 P_2 を求めよ。

(3) L と R は空であるとする。操作（C）を 10 回おこなう。このとき L にも R にも 4 色すべての玉が入っている確率を P_3 とする。$\frac{P_3}{P_1}$ を求めよ。

第 4 問

a を正の実数とし，空間内の 2 つの円板

$$D_1 = \{(x,\, y,\, z)\,|\, x^2 + y^2 \leqq 1,\, z = a\},$$
$$D_2 = \{(x,\, y,\, z)\,|\, x^2 + y^2 \leqq 1,\, z = -a\}$$

を考える。D_1 を y 軸の回りに 180° 回転して D_2 に重ねる。ただし回転は z 軸の正の部分を x 軸の正の方向に傾ける向きとする。この回転の間に D_1 が通る部分を E とする。E の体積を $V(a)$ とし，E と $\{(x,\, y,\, z)|x \geqq 0\}$ との共通部分の体積を $W(a)$ とする。

(1) $W(a)$ を求めよ。

(2) $\displaystyle\lim_{a\to\infty} V(a)$ を求めよ。

第 5 問

(1) 実数 x が $-1 < x < 1,\ x \neq 0$ をみたすとき，次の不等式を示せ。

$$(1-x)^{1-\frac{1}{x}} < (1+x)^{\frac{1}{x}}$$

(2) 次の不等式を示せ。

$$0.9999^{101} < 0.99 < 0.9999^{100}$$

第 6 問

平面上の 2 点 P, Q の距離を $d(\mathrm{P}, \mathrm{Q})$ と表すことにする。平面上に点 O を中心とする一辺の長さが 1000 の正三角形 $\triangle \mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3$ がある。$\triangle \mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3$ の内部に 3 点 $\mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2, \mathrm{B}_3$ を，$d(\mathrm{A}_n, \mathrm{B}_n) = 1 \quad (n = 1, 2, 3)$ となるようにとる。また，

$$\vec{a}_1 = \overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2}, \quad \vec{a}_2 = \overrightarrow{\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3}, \quad \vec{a}_3 = \overrightarrow{\mathrm{A}_3\mathrm{A}_1}$$
$$\vec{e}_1 = \overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1}, \quad \vec{e}_2 = \overrightarrow{\mathrm{A}_2\mathrm{B}_2}, \quad \vec{e}_3 = \overrightarrow{\mathrm{A}_3\mathrm{B}_3}$$

とおく。$n = 1, 2, 3$ のそれぞれに対して，時刻 0 に A_n を出発し，$\vec{e}_n$ の向きに速さ 1 で直進する点を考え，時刻 t におけるその位置を $\mathrm{P}_n(t)$ と表すことにする。

(1) ある時刻で $d(\mathrm{P}_1(t), \mathrm{P}_2(t)) \leqq 1$ が成立した。ベクトル $\vec{e}_1 - \vec{e}_2$ と，ベクトル $\vec{a}_1$ のなす角度を θ とおく。このとき $|\sin\theta| \leqq \dfrac{1}{1000}$ となることを示せ。

(2) 角度 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ を $\theta_1 = \angle \mathrm{B}_1\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2, \quad \theta_2 = \angle \mathrm{B}_2\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3, \quad \theta_3 = \angle \mathrm{B}_3\mathrm{A}_3\mathrm{A}_1$ によって定義する。α を $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ かつ $\sin\alpha = \dfrac{1}{1000}$ をみたす実数とする。(1) と同じ仮定のもとで，$\theta_1 + \theta_2$ の値のとる範囲を α を用いて表せ。

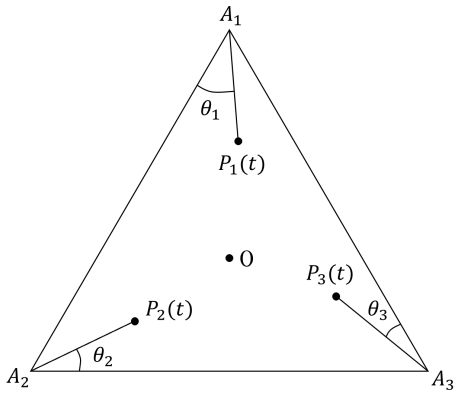
(3) 時刻 t_1, t_2, t_3 のそれぞれにおいて，次が成立した。

$$d(\mathrm{P}_2(t_1), \ \mathrm{P}_3(t_1)) \leqq 1, \quad d(\mathrm{P}_3(t_2), \ \mathrm{P}_1(t_2)) \leqq 1, \quad d(\mathrm{P}_1(t_3), \ \mathrm{P}_2(t_3)) \leqq 1$$

このとき，時刻 $T = \dfrac{1000}{\sqrt{3}}$ において同時に

$$d(\mathrm{P}_1(T), \ \mathrm{O}) \leqq 3, \quad d(\mathrm{P}_2(T), \ \mathrm{O}) \leqq 3, \quad d(\mathrm{P}_3(T), \ \mathrm{O}) \leqq 3$$

が成立することを示せ。



以上