物　　理
慣性モーメントに関する問題

東大入試ドットコム

問題

剛体が角速度 ω で回転しているときの運動エネルギーは，一般に $\frac{1}{2}I\omega^2$ の形で表されることが知られている。I は回転軸まわりの剛体の質量分布により決まるものであり，**慣性モーメント**とよばれる。いま，長さ L の軽くて丈夫な細いパイプがある。このパイプの中には大きさの無視できる小球を自由な位置に埋め込んで固定することができ，またパイプは自由に固定して回転させることができる。図 1 に示すようにパイプの一方の端点を O とし，この点を原点して棒に沿った座標軸を x 軸とする。空気抵抗や摩擦は無視できるとして，以下の問いに答えよ。

I ここではこのパイプを点 O で固定して，同一平面内で回転させることを考える。

(1) $x = L$ の位置に質量 m の小球を埋め込んだときの慣性モーメント I_1 を求めよ。

(2) $x = \frac{1}{3}L, \frac{2}{3}L, L$ の位置に，質量 $\frac{1}{3}m$ の小球をそれぞれひとつずつ埋め込んだときの慣性モーメント I_3 を求めよ。

(3) $x = \frac{k}{n}L\,(k = 1, 2, 3, \ldots, n, n$ は正の整数$)$ の位置に，質量 $\frac{1}{n}m$ の小球をそれぞれひとつずつ埋め込んだときの慣性モーメント I_n を求めよ。

II 密度（単位長さあたりの質量）が均一な値 ρ となるよう内部を固体で埋めきったパイプを，点 O で固定し水平に保ったのちそっと手を放したところ，パイプは鉛直面内で周期運動を行った。鉛直方向とのなす角が $0°, 30°$ となるそれぞれの場合について，パイプの各速度の大きさを求めよ。ただし，重力加速度の大きさを g とする。

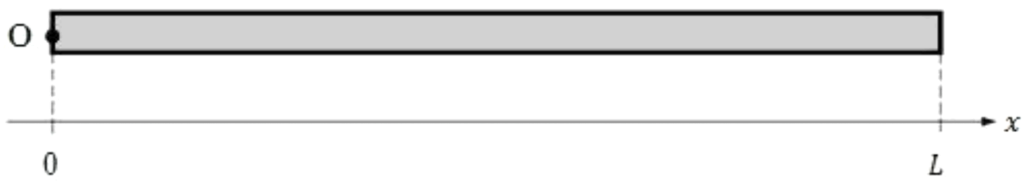

図 1: 座標平面におかれたパイプ

III 以下では，問 II と同様にパイプの密度が ρ となるよう小球を埋め込んだ場合を考える。

(1) 同一平面内での回転を考えるとき，このパイプを点 O で固定した場合の慣性モーメントは，$x = \frac{1}{2}L$ で固定した場合の慣性モーメントの何倍か。

(2) 図 2 に示したようにこのパイプを点 O で固定し，鉛直方向となす角がつねに θ となるように回転させる。ただし，$0° < \theta < 180°$ とする。この場合の慣性モーメントを求めよ。

IV フィギュアスケートの選手たちは氷上で華麗な回転を見せるが，その回転速度を制御する方法について簡単に説明せよ。

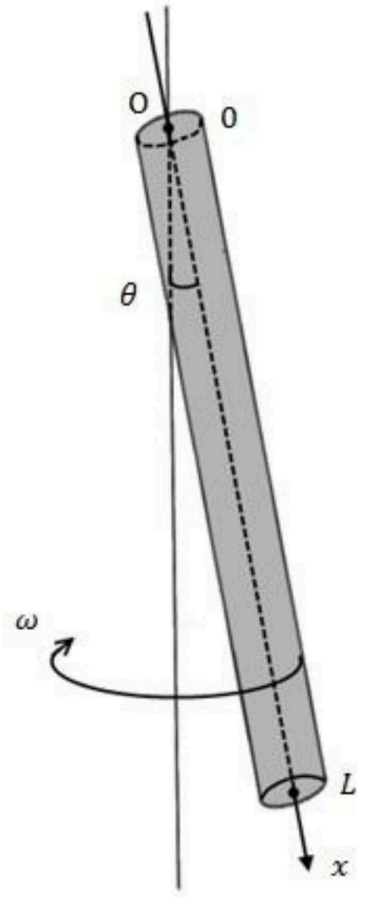

図 2: 角 θ だけ傾けて回転するパイプ

以上